

対称分布の分散共分散行列の縮小推定

東京大・経済・修士2年 中田 竜明

東京大・経済・教授 久保川 達也

1 はじめに

p 次元の n 個のデータが対称な平均未知の分布に従っていると仮定する. このとき二乗損失のもとで分散共分散行列の推定を考えたい.

データの分布が正規分布の場合, 標本共分散行列を全体平均に縮小する推定量が標本共分散行列を優越することが知られている [1]. データの分布に正規性を課さず, 応用上のモデルから導かれる分散共分散行列の縮小推定量は様々な提案されているが, 本報告では分布が正規分布に従わない場合でも平均の情報を組み込むことで推定量の性能の改善を試みる.

一般の対称な分布に対し, 経験ベイズの手法により標本平均を組み込んだ分散共分散行列の多重線形縮小推定量を導出し, その理論的な性質を調べる. また, 得られた推定量が非対称な分布に対しても良いパフォーマンスを持つことを数値実験により調べる.

2 研究内容

観測ベクトルがモデル $\mathbf{x}_j = \boldsymbol{\mu} + \Sigma^{1/2}\mathbf{u}_j$, $E[\mathbf{u}_j] = 0$, $\text{Cov}(\mathbf{u}_j) = I_p$ に従うと仮定する.

(i) $\boldsymbol{\mu}$ が正規分布に従い, Σ が逆ウィシャートに従うことを仮定すると, 共分散行列の推定量として, 以下のような標本平均と標本共分散行列に縮小する推定量のクラスが得られる.

$$\hat{\Sigma} = \beta \left\{ \frac{n-1}{n} S + \gamma \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}^\top \right\} + (1-\beta) \phi I_p$$

(ii) さらに, $\boldsymbol{\mu}$ が混合正規分布に従い, それぞれの正規分布の平均に低次元性を課すと, 低次元性の情報を組み込んだ多重線形縮小推定量のクラスが得られる.

これらの縮小パラメータを, リスクを最小にするパラメータの不偏推定量によりノンパラメトリックに求め, 推定量を導出した. 導かれた推定量の漸近的性質や数値実験の結果を報告する.

参考文献

- [1] Stein, C. (1964). Inadmissibility of the usual estimator for the variance of a normal distribution with unknown mean. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 16(1), 155-160.
- [2] Touloumis, A. (2015). Nonparametric Stein-type shrinkage covariance matrix estimators in high-dimensional settings. *Computational Statistics and Data Analysis*, 83, 251-261.