

空間自己回帰モデルの特性について

早稲田大学 力丸佑紀

(株) データサイエンスコンソーシアム 柴田里程

空間計量経済学では 2 次元上の n 個の地域 \mathbf{s}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) における地域データ $Y(\mathbf{s}_i)$ に対する空間自己回帰モデル

$$\mathbf{Y}_n = \lambda W_n \mathbf{Y}_n + X_n \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (1)$$

がよく用いられる。ただし、 \mathbf{Y}_n は観測値ベクトル、 λW_n は 1 つのパラメータ λ のみに依存する空間重み行列、 $X_n \boldsymbol{\beta}$ は回帰項、 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ は誤差ベクトルであり、 $N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$ にしたがうとする。

Lee(2004) は、モデル (1) の未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}, \lambda, \sigma^2$ の最尤推定量の一致性と極限分布を導くために、 W_n や $\boldsymbol{\varepsilon}_n, X_n$ について 8 つの条件が必要であると述べている。たとえば、以下のような条件である。

- $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ は $N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$ にしたがう
- W_n の (i, j) 成分は一様に $O(1/h_n)$ とする。ただし、任意の i に対し、 (i, i) 成分は 0。
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n > 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n/n = 0$ が成立する

本発表では、以下のような特別な場合に、Lee(2004) が提示している条件が具体的にどのような条件になり、何を意味しているのかを検討する。

■ 地域 \mathbf{s}_i は格子点上に並んでおり、 $X_n \boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0}$ 、 W_n は隣接行列である場合 隣接行列 $W_n = (w_{ij})$ は、 \mathbf{s}_i と \mathbf{s}_j ($i \neq j$) が隣り合っていれば $w_{ij} = 1$ 、それ以外は $w_{ij} = 0$ と定義される行列である。この場合について、Lee(2004) が提示する 8 つの条件を具体的な条件で表現する。また、その条件は定常性の条件とどのような関係にあるのかを検討した結果を報告する。

■ 空間オルンシュタイン-ウーレンバック過程の場合 データ Y は、観測領域 $[0, 1]^2$ を $n \times m$ の格子状に分割し、分割されたそれぞれの地域 (u_j, v_k) ($j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$) で観測された格子データであるとする。格子データであることがわかりやすいようにここでは地域 \mathbf{s}_i ではなく (u_j, v_k) という表現を用いる。データ $Y(u_j, v_k)$ について $E(Y(u_j, v_k)) = 0$,

$$\text{Cov}(Y(u_j, v_k), Y(u'_j, v'_k)) = \sigma^2 e^{-\mu|u_j - u'_j| - \lambda|v_k - v'_k|} \quad (2)$$

である場合、 $\{Y\}$ は空間オルンシュタイン-ウーレンバック過程であるという。ただし、 $\sigma^2 > 0, (\mu, \lambda) \in [a, b]^2 \subset (0, \sigma)^2$ である。 Y が空間オルンシュタイン-ウーレンバック過程である場合、Lee(2004) の条件を具体的に表現し、その解釈について検討したことを報告する。

また、Ying(1993) が提示している空間オルンシュタイン-ウーレンバック過程の最尤推定量の一致性と極限分布に関する結果と具体的に書き直した Lee(2004) の条件等を比較し、検討する。

■参考文献 Lung-Fei Lee, (2004) Asymptotic Distributions of Quasi-Maximum Likelihood Estimators for Spatial Autoregressive Models, *Econometrica*, 72(6), 1899-1925.

Zhiliang Ying, (1993) Maximum Likelihood Estimation of parameters under a Spatial Sampling Scheme, *The Annals of Statistics*, 21(3), 1567-1590.