

正方分割表における条件付き部分対称モデルからの隔たりを測る尺度

東京理科大学理工学研究科 福本 伸樹

横浜市立大学医学部 三枝 祐輔

東京理科大学理工学部 中川 智之

東京理科大学理工学部 富澤 貞男

行と列が同じ分類からなる $r \times r$ 正方分割表において (i, j) セル確率を $p_{ij} (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, r)$, 行変数を X , 列変数を Y とする. 条件付き対称 (CS) モデルは次のように定義される (McCullagh, 1978):

$$p_{ij} = \begin{cases} \gamma \psi_{ij} & (i < j) \\ \psi_{ij} & (i \geq j) \end{cases}$$

ここで, $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ である. CS モデルは, 主対角線に対して対称的なセル確率の比が一定であることを示している. CS モデルが成り立たないとき, CS モデルとの隔たりがどの程度かを測ることに関心がある. $p_{ij}^U = p_{ij}/\delta_U (i < j)$, $p_{ji}^L = p_{ji}/\delta_L (i < j)$, $\delta_U = \sum \sum_{s < t} p_{st}$, $\delta_L = \sum \sum_{s > t} p_{st}$, $q_{ij} = p_{ij}^U/(p_{ij}^U + p_{ji}^L) (i < j)$, $q_{ji} = p_{ji}^L/(p_{ij}^U + p_{ji}^L) (i < j)$, とする. $\delta_U \neq 0$, $\delta_L \neq 0$, $(p_{ij} + p_{ji} \neq 0)$ を仮定する. Tomizawa and Saitoh (1999) は CS モデルからの隔たりを測る尺度 $\Phi^{(\lambda)}$ を提案した:

$$\Phi^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r (p_{ij}^U + p_{ji}^L) \Psi_{ij}^{(\lambda)} \quad (\lambda > -1),$$

ここで,

$$\Psi_{ij}^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 - \frac{2^\lambda}{2^\lambda - 1} \{1 - (q_{ij})^{\lambda+1} - (q_{ji})^{\lambda+1}\} & (\lambda \neq 0) \\ 1 - \frac{1}{\log 2} (-q_{ij} \log q_{ij} - q_{ji} \log q_{ji}) & (\lambda = 0) \end{cases}$$

である.

CS モデルが成り立たないとき, CS モデルより制約を緩めたモデルとその尺度に関心がある. 本講演では, 条件付き部分対称 (CPS) モデルと, CPS モデルからの隔たりを測る尺度 $\tau^{(\lambda)}$ を提案する:

$$\tau^{(\lambda)} = \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=i+1}^r [\Psi_{ij}^{(\lambda)}]^{(p_{ij}^U + p_{ji}^L)/2} \quad (\lambda > -1).$$

提案尺度は次の性質を持つ. (i) $0 \leq \tau^{(\lambda)} \leq 1$, (ii) $\tau^{(\lambda)} = 0$ が成り立つことの必要十分条件は, 少なくとも 1 組の (k, l) , $k < l$ に対して $P(X = k, Y = l | X < Y) = P(X = l, Y = k | X > Y)$ が成り立つことであり, (iii) $\tau^{(\lambda)} = 1$ が成り立つための必要十分条件は, すべての $i \neq j$ に対して, $p_{ij} = 0$ (このとき, $p_{ji} \neq 0$) が成り立つことである.

(i, j) セル観測度数を n_{ij} とし, $\{n_{ij}\}$ は多項分布に従うと仮定する. ここで, $\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n$, $n = \sum \sum n_{ij}$ とする. また $\hat{\tau}^{(\lambda)}$ を, $\tau^{(\lambda)}$ の $\{p_{ij}\}$ を $\{\hat{p}_{ij}\}$ で置き換えた推定量とする. デルタ法により, $\sqrt{n}(\hat{\tau}^{(\lambda)} - \tau^{(\lambda)})$ は漸近的に平均 0, 分散 $\sigma^2[\tau^{(\lambda)}]$ の正規分布に従う. この結果より $\tau^{(\lambda)}$ の近似信頼区間を構成する. CPS モデルからの隔たりを測る尺度の有用性は当日示す.

参考文献

- [1] McCullagh, P. (1978). A class of parametric models for the analysis of square. *Biometrika*, **65**, 413-418.
- [2] Tomizawa, S. and Saitoh, K. (1999). Measure of departure from conditional symmetry for square contingency tables with ordered categories. *Journal of the Japan Statistical Society*, **29**, 65-78.