Spatial AR(p)-GARCH(k, l) Models for High-Dimensional Financial Time Series

東北大 経済 佐藤　宇樹
東北大 経済 松田　安昌

本報告では、はじめに、新たな多変量ボラティリティモデルとして、Spatial AR(p)-GARCH(k, l) モデルの提案を行う。次に、モデル内のパラメーターの推定法として擬似最尤法による二段階推定法について説明を行う。また、提案した推定量が望ましい漸近的性質をもつことを明らかにする。その後、シミュレーションデータを用いて提案した推定量の小標本特性を示す。最後に提案したモデルを米国市場の株式データに応用し、本モデルが既存モデルよりも高いボラティリティの予測精度を持つことを示す。

Spatial AR(p)- GARCH(k, l) モデル

ボラティリティとはモデルの条件付き分散のことであり、ファイナンスにおいてはリスク管理やオプションの価格計算に用いられる。多変量ボラティリティモデルは複数の金融商品間の変動の相互関係をモデル化できる一方で、次元の呪いと言われる問題を含んでいる。次元の呪いとは、多変量ボラティリティモデルでは条件付きの分散共分散行列の推定を行うため、推定すべきパラメーターの数が金融商品の数が増えるにつれて爆発的に増加してしまうという問題のことである。本報告では次元の呪いを解決するために空間計量経済学のツールを応用した、 Spatial AR(p)-GARCH(k, l) モデルの提案を行う。

Spatial AR(p)-GARCH(k, l) モデルは次のように定義される。

$$\begin{aligned}
S(\lambda)r_t &= \varepsilon_t, \\
S(\lambda) &= (I-\lambda_p W_p)\cdots(I-\lambda_1 W_1), \\
\varepsilon_{i,t} &= \sigma_{i,t} f_{i,t}, \\
f_{i,t} &\sim i.i.d\ (0,1), \\
\sigma^2_{i,t} &= \omega_i + \sum_{j_1=1}^{k} \alpha_{i,j_1}\varepsilon^2_{i,t-j_1} + \sum_{j_2=2}^{l} \beta_{i,j_2}\sigma^2_{i,t-j_2},
\end{aligned}$$

ここで $r_t = (r_{1,t},\ldots,r_{n,t})'$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t},\ldots,\varepsilon_{n,t})$ はそれぞれ金融商品のリターンと撹乱項のベクトルである。$\sigma_{i,t}$ は ボラティリティであり、 $f_{i,t}$ は　独立同分布に従う平均 0 分散 1 の確率変数である。W_p は空間重み行列であり、金融商品の情報などを用いて作成される n 行 n 列の行列である。パラメーターは $(\lambda,\omega,\alpha,\beta)$ であり、λ が金融商品間の空間相関の強さを表す。ω,α,β は GARCH パラメーターである。

Spatial AR(p)-GARCH(k, l) モデル内のパラメーターは二段階推定法によって推定される。1 段階目では空間相関パラメーターの推定を行い、2 段階目では 1 段階目の推定値から計算される残差を用いて GARCH パラメーターの推定を行う。また、各推定量は一致性を持つことを明らかにする。モンテカルロシミュレーションでは、$f_{i,t}$ が異なる分布に従う際の推定量のバイアスや平均平方二乗誤差を比較し、それらが分布によらず小さいことから、提案した推定量が望ましい小標本特性を持つことを示す。最後に、実証分析として米国市場の株式データに本モデルを応用し、既存モデルと比較することで、本モデルがより高い予測精度を持つことを示す。