多変量の不等間隔時空間データに対する
スペクトル密度関数のノンパラメトリックな推定

関東学院大・経済　山田 英夏

1　はじめに

不等間隔地点上で観測される多変量の定常確率場の時空間データに対して, 周波数領域におけるスペクトル密度関数のノンパラメトリックな推定について考える. 時空間データでは, 調査地点が地形の特殊性などの影響を受ける場合もあるため, 観測地点が不等間隔な場合は自然であり重要であるが, 格子点の場合とは別にスペクトル密度の Fourier 級数近似理論を $\mathbb{R}^d$ へと拡張することが必要となり困難が生じる. こうした中で, Matsuda and Yajima (2009) は不等間隔時空間データに対して, ピリオドグラムに基づいて構成されるノンパラメトリックおよびパラメトリックな種々のスペクトル推定量を提案し, それらの漸近的性質を明らかにしている. 特に, ノンパラメトリックなスペクトル推定量に対しては一致性を導いている. ただし, この結果は単変量の確率場に対して与えられており, ここでは主に多変量化について考える.

2　ノンパラメトリックなスペクトル推定量の漸近的性質

多変量の弱定常確率場 $\{\boldsymbol{X}(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d\}$ $(d \geq 2)$ によって表現される時空間データが, 不等間隔地点 $\boldsymbol{t}_i \in S_k = [0, A_1(k)] \times \cdots \times [0, A_d(k)], i = 1, \cdots, n_k$ において観測されるとする. ここで, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ は標本の大きさであり, 観測地点は $\mathrm{supp}(g) \subset [0,1]^d$ なる確率密度関数 $g(\boldsymbol{x})$ を持つ iid な確率ベクトル $\boldsymbol{u}_i, i = 1, \cdots, n_k$ によって, $\boldsymbol{t}_i = \mathrm{diag}(A_1(k), \cdots, A_d(k))\boldsymbol{u}_i$ として拡大因子 $A_j(k), j = 1, \cdots, d$ を通して実現されるものとする. さらに, $\boldsymbol{X}(\mathbf{s}) = (X_1(\mathbf{s}), \cdots, X_p(\mathbf{s}))^\top$ $(p \geq 1)$ の共分散行列のスペクトル表現 $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}\rangle)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})d\boldsymbol{\lambda}$ が可能であるとする.

このとき, スペクトル密度行列 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega}) = (f_{rs}(\boldsymbol{\omega}))_{r,s=1}^p$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ に対して, Matsuda and Yajima (2009) によるノンパラメトリックなスペクトル推定量の多変量における適用について考える. このスペクトル推定量 $\widehat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\omega}) = (\widehat{f}_{rs}(\boldsymbol{\omega}))_{r,s=1}^p$ は, ラグ・ウィンドウ関数 $w_k(\boldsymbol{x})$ の Fourier 変換であるスペクトル窓関数 $W_k(\boldsymbol{\lambda}) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} w_k(\boldsymbol{x})\exp(-i\langle\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}\rangle)d\boldsymbol{x}$ との合成積 $(W_k * I_{k,rs})(\boldsymbol{\omega})$ によるピリオドグラム $\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{\lambda}) = (I_{k,rs}(\boldsymbol{\lambda}))_{r,s=1}^p$ の平滑化により定義され, ラグ・ウィンドウ推定量として以下のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_{rs}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^d} I_{k,rs}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})W_k(\boldsymbol{\lambda})d\boldsymbol{\lambda} \\
&= (2\pi)^{-d}G^{-1}|S_k|n_k^{-2}\sum_{p=1}^{n_k}\sum_{q=1}^{n_k} X_r(\boldsymbol{t}_p)X_s(\boldsymbol{t}_q)\exp(-i\langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{t}_p - \boldsymbol{t}_q\rangle)w_k(\boldsymbol{t}_p - \boldsymbol{t}_q).
\end{aligned}
$$

ここで, $|S_k| = A_1(k) \times \cdots \times A_d(k)$ は観測領域の体積, $G = \int_{[0,1]^d} |g(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}$ は定数である.

本報告では, 混合増大領域漸近論の枠組みのもとで, 上記のクロス・スペクトル推定量の漸近的性質を考える. 特に, Matsuda and Yajima (2009) の一致性を多変量の場合に述べ直して紹介する.

参考文献

Matsuda, Y. and Yajima, Y. (2009), "Fourier analysis of irregularly spaced data on R^d," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)*, 71, 191–217.