

Asymptotics of maximum likelihood estimation for stable law with continuous parameterization

Muneya Matsui 松井 宗也

Abstract

Asymptotics of maximum likelihood estimation for α -stable law are analytically investigated with a continuous parameterization. The consistency and asymptotic normality are shown on the interior of the whole parameter space. Although these asymptotics have been provided with Zolotarev's (B) parameterization, there are several gaps between. Especially in the latter, the density, so that scores and their derivatives are discontinuous at $\alpha = 1$ for $\beta \neq 0$ and usual asymptotics are impossible. This is considerable inconvenience for applications. By showing that these quantities are smooth in the continuous form, we fill gaps between and provide a convenient theory. We numerically approximate the Fisher information matrix around the Cauchy law $(\alpha, \beta) = (1, 0)$. The results exhibit continuity at $\alpha = 1, \beta \neq 0$ and this secures the accuracy of our calculations.

4つのパラメーター全てに関して連続となるよう定義された安定分布の、最尤法の漸近理論を与える。4つのパラメーターとは、位置 $\mu \in R$ 、尺度 $\sigma > 0$ 、歪み度 $\beta \in [-1, 1]$ 、尖り度 $\alpha \in (0, 2]$ であり、裾確率は α から決まる。真の値がパラメーター空間の内点であるとき、最尤推定量の一致性と漸近正規性を示した。これらの結果は安定分布の Zolotarev の (B) 表現では Dumouchel (1973) により得られている。しかし後者の表現では、指数パラメーター α が 1 のときに分布、尤度、スコともにも不連続となり (ただし $\beta = 0$ を除く) 通常の漸近論が成り立たないといった不便な点がある。連続パラメーターの場合にも、 $\alpha = 1, \beta \neq 0$ でのスコア関数やその微分は複雑である。しかし、いくつかの発散する項が打ち消し合って収束しその結果として連続となる。そして通常の漸近論を展開できる。理論的な結果の確認のために、コーシー分布 ($\alpha = 1, \beta = 0$) 周りで、フィッシャー情報量を数値的に求めた。すると ($\alpha = 1, \beta \neq 0$) で連続性が観測され理論と整合的であった。

- [1] DuMouchel, W.H. (1973) On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution. *Annals of Statistics* **1**, 948–957.
- [2] Matsui, M. (2019) Asymptotics of maximum likelihood estimation for stable law with continuous parameterization. arXiv:1901.09303.
- [3] Zolotarev, V.M. (1986) *One-Dimensional Stable Distributions*. Transl. of Math. Monographs, **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (Transl. of the original 1983 Russian)