線形判別分析における事後分布の密度関数

北海道大学・経済学院　米永航志朗
北海道大学・公共政策大学院　鈴川晶夫

多変量正規分布とウィッシャート分布の関数は多変量解析においてしばしば現れる．例えば多変量正規分布を母集団分布として想定した場合に，主成分分析や判別分析において，また，ホテリングの T^2 統計量などにおいて，それが現れることは周知である．ところが，多変量正規分布とウィッシャート分布の関数についての結果はこれまで統計学的な文脈において，Bodnar&Okhrin(2011) [1], Bodnar&Mazur&Okhrin(2013) [2], そして，Kotsiuba&Mazur(2016) [3] を除いてあまり議論されてこなかった．本報告ではウィッシャート分布と正規ベクトルの関数の分布の一つとして線形判別分析について考察したい．

いま，二つの正規母集団 $\Pi_i : N_p(\mu_i, \Sigma)$ のいずれかに新しい観測ベクトル y を判別する状況を考える．このとき以下の線形判別関数が与えられる．

$$L = (\mu_1 - \mu_2)'\Sigma^{-1}\left\{y - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\right\}$$

$X_1|\mu_1, \Sigma \sim N_p(\mu_1, \Sigma)$, $X_2|\mu_2, \Sigma \sim N_p(\mu_2, \Sigma)$ とし，それぞれ n_1 個，n_2 個の標本が得られたとき，μ_i, Σ^{-1} の事後分布は適当な事前分布のもとで，$i = 1, 2$ に対し

$$\mu_i|x_1, x_2, \Sigma^{-1} \sim N_p\left(\theta_i, \frac{\Sigma}{\gamma_i}\right), \Sigma^{-1}|x_1, x_2 \sim W_p(\nu, \Lambda^{-1})$$

のように，それぞれ多変量正規分布とウィッシャート分布を持つ．そこで，L におけるパラメータ μ_1, μ_2 と Σ の部分にそれらの事後分布を差し込んだ場合，L はウィッシャート行列と正規ベクトルの関数となることがわかる．このとき L の密度関数は次のように表現される．

$$f_L(u) = \frac{1}{(1+t)^{\frac{\nu}{2}}}\int_0^\infty f_{N(2\omega_1 v, 4\omega_1 v)}(u|v) f_{\chi_p^2}(v)\, {}_1F_1\left(\frac{\nu}{2}; \frac{p}{2}; \frac{t}{2(1+t)}v\right) dv$$

ただし，$f_{N(\mu,\sigma)}(x)$ は平均 μ, 分散 σ^2 を持つ正規分布の密度関数で，$f_{\chi_p^2}(x)$ は自由度 p のカイ二乗分布の密度関数で，${}_1F_1(a; b; z)$ はクンマーの合流型超幾何関数である．本報告においてはこの密度関数についての無限級数での表現を与え，様々な状況下でどのように密度関数が変化するかを考察する．

参考文献

[1] Bodnar, T.& Okhrin, Y.(2011) On the Product of Inverse Wishart and Normal Distributions with Applications to Discriminant Analysis and Portfolio Theory. *Scandi. J. Statist.* **38**, 311-331.

[2] Bodnar, T.& Mazur, S. & Okhrin, Y.(2013) On the exact and approximate distributions of the product of a Wishart matrix with a normal vector. *J. Multivariate Anal.* **122**, 70-81.

[3] Kotsiuba, I.& Mazur, S. (2016) On the asymptotic and approximate distributions of the product of an inverse Wishart matrix and a Gaussian vector. *Theor. Probability and Math. Statist.***93**, 103-112.