2つの事前分布を用いた複数の独立分布における 平均母数の同時推定

三重大学　　小椋 透
統計数理研究所　柳本 武美

1. はじめに

K 個の独立した分布からサンプルが1つずつ $(x_1, \ldots, x_K)$ 得られたときの平均母数を同時推定する問題を考える. ベイズ法では, ある事前分布を仮定して平均パラメータの事後平均による同時推定する方法がよく用いられる. 本研究では, 超母数の推定時と平均母数の同時推定時で事前分布を使い分けることにより, リスクが低減されることを報告する.

2. 平均母数の同時推定

正準パラメータの事後平均を用いたポアソン分布の平均母数 λ の同時推定と平均パラメータの事後平均を用いた指数分布の平均母数 μ の同時推定は, $m > 0$, $\delta \geq 0$, $a \geq 0$, $\psi(\cdot)$ はディガンマ関数として, それぞれ次のように表される.

$$\text{ポアソン分布: } \hat{\lambda}_k = \frac{1}{1+\delta} \exp \psi(x_k + \delta m + a), \quad k = 1, \ldots, K$$

$$\text{指数分布: } \hat{\mu}_k = \frac{x_k + \delta m}{a + \delta}, \quad k = 1, \ldots, K$$

このとき, m と δ は対数周辺尤度を最大化で決定する. ポアソン分布と指数分布の対数周辺尤度は次のよう表される.

$$\text{ポアソン分布: } \log \mathrm{ML}(m, \delta) = \sum_{k=1}^{K} \{\log \Gamma(x_k + \delta m + a) - \log \Gamma(x_k + 1) - \log \Gamma(\delta m + a)\} + K(\delta m + a) \log \delta - \{K(\delta m + a) + \sum_{k=1}^{K} x_k\} \log(1+\delta)$$

$$\text{指数分布: } \log \mathrm{ML}(m, \delta) = K \log(a+\delta) + K(a+\delta) \log(\delta m) - (a+1+\delta) \sum_{k=1}^{K} \log(x_k + \delta m)$$

対数周辺尤度の最大化時の a_h と平均母数の同時推定時の a_p は, 一般に同じ値 $(a_h = a_p)$ を用いるが, 本研究では異なる値 $(a_h \neq a_p)$ を用いる.

3. 推定量の評価

次のよく知られている3つのリスクを用いて同時推定を評価する. $(\theta = \lambda, \mu$. $\check{\theta}$: 推定結果)

$$R_e(\check{\theta}, \theta) = \check{\theta} \log \frac{\check{\theta}}{\theta} - \check{\theta} + \theta, \quad R_m(\check{\theta}, \theta) = \theta \log \frac{\theta}{\check{\theta}} - \theta + \check{\theta}, \quad R_{MS}(\check{\theta}, \theta) = (\check{\theta} - \theta)^2$$

シミュレーションや実例を用いた有効性検証の中から, Ghosh and Yang (1998) の母平均設定によるポアソン分布のシミュレーション結果を下記に一部示す. 事前分布を使い分けた場合 $(a_h, a_p) = (0, 0.5)$ と同じ事前分布を用いた場合 $(a_h, a_p) = (0.5, 0.5)$ における3つのリスクに対する10万回の算術平均の比較である. いずれもリスクが低減されていることが分かる.

母平均	$R_e(\check{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\lambda})$		$R_m(\check{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\lambda})$		$R_{MS}(\check{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\lambda})$	
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$	(0,0.5)	(0.5,0.5)	(0,0.5)	(0.5,0.5)	(0,0.5)	(0.5,0.5)
(3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0)	0.7034	0.7519	0.7591	0.8924	4.1996	4.2580
(0.8, 1.6, 2.4, 3.2, 4.0)	1.7666	1.8247	1.7472	2.1126	7.8665	7.8668

参考文献

[1] Ghosh, M. and Yang, M.-C. (1988). *The Annals of Statistics*, **16**(1), 278-291.