# 一般化平均を用いた非正規な混合効果モデル

横浜市立大学　三枝 祐輔
成蹊大学　小森 理
統計数理研究所　江口 真透

混合効果モデルは医学，薬物動態学，生態学を含む広範な分野において，経時測定データなどのクラスターデータに対して用いられている．あるクラスター $i$ における $j$ 番目の応答変数を $y_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n_i)$，$p$ 次元と $q$ 次元の共変量をそれぞれ $x_{ij}$, $z_{ij}$ とする．このとき一般化線形混合効果モデル (GLMM) は次のように表される：

$$g(\mu_{ij}) = \beta^\top x_{ij} + b_i^\top z_{ij}, \tag{1}$$

ただし，$g$ はリンク関数，$\mu_{ij} = E(y_{ij}|b_i)$ は $b_i$ が与えられたという条件の下での $y_{ij}$ の条件付き期待値，$\beta$ は $p$ 次元の固定効果パラメータ，$b_i$ は $q$ 次元の変量効果パラメータである．

GLMM の拡張として，次のモデルを考える：

$$g\left(\mu_{ij}^{(\tau)}\right) = \frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1}{2}\exp(\tau\beta^\top x_{ij}) + \frac{1}{2}\exp(\tau b_i^\top z_{ij})\right), \tag{2}$$

ただし，$\mu_{ij}^{(\tau)} = E(y_{ij}|b_i, \tau)$，$\tau \in \mathbb{R}$ はチューニングパラメータである．(2) 式で与えられるモデルを一般化準線形混合効果モデル (GQLMM) と呼ぶこととする．GQLMM の予測関数は固定効果項と変量効果項の一般化平均であり，$\tau$ が 0 に近づくとき (2) 式の極限は線形予測関数，すなわち (1) 式の右辺に一致する．

変量効果パラメータ $b_i$ が平均ベクトル 0，分散共分散行列 $D$ をもつ $q$ 次元正規分布に従うと仮定する．混合効果モデルにおける推定アルゴリズムについて，係数パラメータ $\beta$ と $b_i$ の推定は準尤度関数のラプラス近似を利用することができ [1]，GQLMM においても同様である．変量効果の正規性の仮定より GLMM の予測関数は正規分布に従うが，標準的な準尤度推定においてはこの正規性からの乖離に対してロバストでないことが報告されている [2]．一方，GQLMM の予測関数は $\tau \neq 0$ のとき，非正規な確率分布に従い，$\tau$ の符号によって正または負の歪みをもつ．そのため GQLMM は，チューニングパラメータ $\tau$ を適切に選択することで，変量効果の非正規性をうまく取り込むことができると期待される．GQLMM に関するモデル選択は，条件付き赤池情報量規準 (cAIC) [3] を用いる．

本講演では，GQLMM のパラメータ推定，モデル選択について議論し，さらにシミュレーション，実データ解析について報告する．

参考文献

[1] Breslow, N. E. and Clayton, D. G. (1993). *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 9-25.

[2] Litière, S., Alonso, A. and Molenberghs, G. (2008). *Statistics in Medicine*, **27**, 3125-3144.

[3] Vaida, F. and Blanchard, S. (2005). *Biometrika*, **92**, 351-370.