混合ガウス分布の項数削減とガウス和フィルタへの適用

東京大学 数理・情報教育研究センター　北川 源四郎

時系列 y_n の線形状態空間モデル $x_n = F_n x_{n-1} + G_n v_n$, $y_n = H_n x_n + w_n$ において，ガウス和フィルタではノイズ分布が混合正規分布の形で

$$p(v_n) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varphi(v_n|0, Q_i), \quad p(w_n) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \varphi(w_n|0, R_j) \tag{1}$$

と表現できる場合には，状態の予測分布およびフィルタ分布が以下のように求められる．

$$p(x_n|Y_{n-1}) = \sum_{j=1}^{m_n} \delta_{jn} \varphi(x^j_{n|n-1}, V^j_{n|n-1}), \quad p(x_n|Y_n) = \sum_{i=1}^{\ell_n} \gamma_{in} \varphi(x^i_{n|n}, V^i_{n|n}) \tag{2}$$

ここで，各ガウス分布のパラメータ $x^j_{n|n-1}$, $V^j_{n|n-1}$, $x^i_{n|n}$, $V^i_{n|n}$ がカルマンフィルタによって計算できるのが大きなメリットである．ただし，ガウス分布の項数が $m_n = q \times \ell_{n-1}$, $\ell_n = r \times m_n$ となることから, n ステップ後の項数は $(q \times r)^n$ 倍となる．従って，ガウス和フィルタを実データの解析に適用できるようにするためにはステップごとに急増するガウス分布の項数を効率的かつ精度よく削減する方法が不可欠である．

混合ガウス分布の項数削減に関しては近年，機械学習の分野で KL 情報量の最小化を近似的に実現する方法がいろいろと提案され研究が進んでいるが，KL 情報量は混合ガウス分布の場合に一般には解析的表現が得られない点に困難がある．現状では二つのガウス成分を併合することによる KL 情報量の増加の上限を計算し，それを最小とするペアを逐次的に併合していく方法が比較的近似精度に優れた方法とされている．本講演では，χ^2-divergence

$$D(g; f) = \int \left(\frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right)^2 f(x) dx \tag{3}$$

を用いて，逐次項数削減を行う方法を採用する．χ^2-divergence を用いるメリットは，2 つの正規分布の混合分布を $g(x)$，それらを併合したひとつの正規分布を $f(x)$ としたときの $D(g; f)$ の解析的表現が得られることである．報告では，この方法により KL 情報量を数値積分で求めた場合に近い精度の項数削減が実現できた例を示す．

次に，この方法をガウス和フィルタ及び平滑化のアルゴリズムに実装した結果についても報告するが，システムノイズが，分散の小さな正規分布と大きな正規分布の混合分布の場合には，非ガウス型平滑化や粒子平滑化と同様の結果を短い計算時間で実現できることを示す．

関連文献

Kitagawa, G. (1994). The two-filter formula for smoothing and an implementation of the Gaussian-sum smoother. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **46**(4), 605–623.

Runnalls, A.R. (2006), A Kullback-Leibler approach to Gaussian mixture reduction, *IEEE Trans. Aerospace and Electronics Systems*, **43**(3), 989–999.