von Mises 分布における自然母数の事後平均

法政大学理工学部　作村 建紀
統計数理研究所　柳本 武美

1. はじめに

von Mises 分布の集中度パラメータに対する有効な推定量として，自然母数を用いた事後平均によるベイズ推定量を提案する．この推定量は最適性などの優れた特徴を持つ (Yanagimoto & Ohnishi, 2009)．ベイズ推定量ではしばしば事前分布の選択が問題になる．事前情報がまったく無い，あるいは少ない場合には，弱情報事前分布の代わりに，客観性を保証するという意味で，無情報事前分布を用いることは自然である．無情報事前分布のもとで構成されたベイズ推定量は，事前情報を得られたときにはさらに良い推定量となることが期待できるため，この仮定は重要である．無情報事前分布としては，reference prior の適用が推奨される (Robert, 2007)．これは，標本密度の Fisher 情報行列から導出できる (Garvan & Ghosh, 1997)．

さて，von Mises 分布のパラメータ推定量として考えられるものとして，最尤推定量（MLE），周辺最尤推定量（MMLE），あるいは集中度パラメータの事後平均が挙げられる．このとき，これらの従来推定量を比較対照として，いくつかの損失関数に基づくリスク評価を行い，提案推定量の性能について言及する．

2. 提案推定量

次の確率密度関数を持つ標本 $x_1, \ldots, x_n$ は von Mises 分布に従う．

$$p(x \mid \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi I_0(\tau)} \exp\left\{\tau \cos(x-\eta)\right\}, \quad I_j(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{jt} e^{\tau \cos t} dt$$

ここで，$x, \eta \in [0, 2\pi)$ であり，$\tau > 0$ は集中度パラメータと呼ばれる．また，reference prior は

$$\pi_R(\eta, \tau) \propto \left\{1 - \frac{A(\tau)}{\tau} - A^2(\tau)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad A(x) = \frac{I_1(x)}{I_0(x)}$$

である (Garvan & Ghosh, 1997)．このとき，提案推定量は，$\pi_R(\eta, \tau)$ のもとでの自然母数の事後平均によって得られる．つまり，

$$\hat{\tau} = \int_0^\infty \tau \pi_m(\tau \mid \boldsymbol{x}) A(\tau R(\boldsymbol{x})) d\tau,$$

$$\pi_m(\tau \mid \boldsymbol{x}) = \frac{I_0^n(\tau R(\boldsymbol{x}))\pi_R(\tau)/I_0^n(\tau)}{\int_0^\infty I_0^n(\tau R(\boldsymbol{x}))\pi_R(\tau)/I_0^n(\tau) d\tau}, \quad R^2(\boldsymbol{x}) = \left\{\sum_{i=1}^n \cos(x_i)\right\}^2 + \left\{\sum_{i=1}^n \sin(x_i)\right\}^2$$

3. リスク比較

リスク関数 $R_*(\hat{\theta}, \theta) = \int L_*(\hat{\theta}; \theta) p(x|\theta) dx$ を用いて評価する．ここで，$L_*(\hat{\theta}; \theta)$ は損失関数であり，ここでは，二乗誤差 $L_s(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$，Kullback-Leibler divergence（KLD）$L_e(\hat{\theta}, \theta) = D(\hat{\theta}, \theta)$，その双対な KLD として $L_m(\hat{\theta}, \theta) = D(\theta, \hat{\theta})$ の 3 つを扱う．シミュレーションによりリスクの比較を行った結果，提案推定量は良い性能を示すことが確認された．

References

Garvan, C. W. & Ghosh, M. (1997, Dec.). Noninformative priors for dispersion models. *Biometrika*, *84*(4), 976-982.

Robert, C. (2007). *The bayesian choice: from decision-theoretic foundations to computational implementation*. Springer Science & Business Media.

Yanagimoto, T. & Ohnishi, T. (2009). Bayesian prediction of a density function in terms of e-mixture. *Journal of Statistical Planning and Inference*, *39*, 3064-3075.