

情報量規準 sBIC の適用範囲の拡張及び補正

京都大 今井 徹

混合分布や縮小ランク回帰をはじめ、正則条件を満たさない特異モデルがよく使われている。モデルの妥当性評価を(対数)周辺尤度で行うことがあるが、正則条件を満たしている場合は BIC により近似できるが、特異モデルの場合は BIC による近似は理論的妥当性がない。特異モデルの場合でも対数周辺尤度 $\log L(M)$ は次の漸近展開を持つことが知られている (Watanabe, 2009):

$$\log L(M) = \log p(\mathbf{X}^n | \theta_0, M) - \lambda \log n + (\mathbf{m} - 1) \log \log n + R_n.$$

ここで、 $\theta_0 = \arg \min_{\theta} KL(q||p(\theta))$, λ は実対数閾値, \mathbf{m} は実対数閾値の位数と呼ばれるモデル p と真の分布 q から決まる量であり, R_n は $O_p(1)$ の確率変数である。この漸近展開に対する近似として, WBIC (Watanabe, 2013) は $WBIC = \log L(M) + O_p(\sqrt{\log n})$, sBIC (Drton and Plummer, 2017) は $sBIC = \log L(M) + O_p(1)$ の近似を与える。WBIC と sBIC では、実対数閾値が知られているモデルで数値実験を行うと sBIC は WBIC より真のモデルを選択する確率が高い傾向があることが報告されている (Drton and Plummer, 2017)。しかし、実対数閾値やその自明でない上限が知られているモデルはまだ少ないため、sBIC の適用できるモデルは少ない。本発表ではこの sBIC の適用範囲を広げることと補正項による改良を試みる。

まず実対数閾値が知られていないモデルに対しては、実対数閾値を推定して代用することが考えられる。既存の実対数閾値の推定量 (Watanabe, 2013) は、不偏となるハイパーパラメータが存在せず、ハイパーパラメータによっては推定値が負になり得る。これに対し、新たに提案された実対数閾値の推定量 (Imai, 2019a) は推定値が常に正となり、また不偏となるハイパーパラメータが存在する。この方法による sBIC の適用範囲拡大を試みる。

次に、sBIC では(局所的な)最尤推定量を用いているが、特異モデルでは一般に最尤推定量は存在しない。また、局所的な最尤推定量が大局的な最適点とはかなり異なることがあることが知られている。そこで、対数周辺尤度の漸近展開に現れる $\log p(\mathbf{X}^n | \theta_0, M)$ の一致推定量で置き換えることで、局所的な最尤推定量が良くないケースでも妥当性のある基準になるように補正をする、特異モデルの情報量規準の標準化 (Imai, 2019b) の適用を検討する。

最後に、対数周辺尤度の漸近展開に現れる R_n の評価を行い、sBIC に反映させることを検討する。本発表では R_n の評価 (Imai, 2019c) を用い、sBIC の標準化したものに R_n の評価量を加えることで、対数周辺尤度の評価の改良を試みる。

当日は上記についての詳細な結果を報告する。

参考文献

- [1] Watanabe, S. (2009) *Algebraic Geometry and Statistical Learning Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] Watanabe, S. (2013) A widely applicable Bayesian information criterion. *Journal of Machine Learning Research*, 14 (1), 867-897.
- [3] Drton, M. and Plummer, M. (2017) A Bayesian information criterion for singular models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* 79 (2), 323-380.
- [4] Imai T. (2019a) Estimating real log canonical thresholds, *arXiv*, 2019
- [5] Imai T. (2019b) Standardization of information criteria for singular models, *arXiv*, 2019
- [6] Imai T. (2019c) Analysis for the constant order term of the asymptotic expansion of the marginal likelihood for singular models, *arXiv*, 2019