高次元正規分布の平均の縮小推定

東京大・経済・博士 1 年　湯浅　良太
東京大・経済・教授　久保川　達也

1　初めに

正規分布の行列平均の推定問題を考える．Efron and Morris (1972) により標本共分散行列の逆行列を用いた縮小推定量が提案されている．最尤推定量であるデータ自身を用いるより良い精度で推定が可能となることが示された．

しかし, 次元がサンプルサイズより大きい時はこの方法を用いることができず, また, 次元とサンプルサイズが近い値をとるような時には精度の改善の程度があまり良くない．そこで, サンプルサイズと次元がともに大きくなるような高次元の設定で有効に働くような推定量を提案する．

2　研究内容

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Theta} + \mathcal{N}_{p\times n}(0, \boldsymbol{I}_p, \boldsymbol{I}_n)$ で与えられる $\boldsymbol{X}$ が観測されるときに $\boldsymbol{\Theta}$ を推定したい．平均二乗誤差損失の下で Θ を推定する．Efron and Morris(1972, 76) では, $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{EM1} = \overline{\boldsymbol{X}} + (\boldsymbol{I} - (n-p-2)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top)^{-1})(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}})$, $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{EM2} = \overline{\boldsymbol{X}} + \left(\boldsymbol{I} - (n-p-2)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top)^{-1} - \frac{p^2+p-2}{\mathrm{tr}\,((\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top))}\boldsymbol{I}\right)(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}})$ という推定量が提案されている．これに対し, 高次元の場合に有効に働く, リッジ型を用いた推定量を考えたい．$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{RLS}_{a,0} := \overline{\boldsymbol{X}} + (\boldsymbol{I} - a(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top + \hat{\alpha})^{-1})(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}})$, $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{RLS}_{a,b} := \overline{\boldsymbol{X}} + \left\{\boldsymbol{I} - a(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top + \hat{\alpha})^{-1} - \frac{b}{\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top)}\boldsymbol{I}\right\}(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}})$ という 2 通りを考える．

重み a, b の提案は, 二乗損失の最小化の観点から行う．具体的には, Stein の等式を用いる方法により導出した．さらに, ミニマックス性を持つことを示した．加えて, 事前分布の仮定のもと, 固有値の漸近的挙動を表現するランダム行列理論を用いることで, 提案する重みが漸近的な最適化にもなっていることが分かる．最後に数値実験の結果を紹介する．

参考文献

Efron, B. and Morris, C. (1972). Empirical Bayes on vector observations: An extension of Stein's method. Biometrika. 59, 335-347.

Efron, B. and Morris, C. (1976). Multivariate Empirical Bayes and Estimation of Covariance Matrices. The annals of statistics. 4, 22-32.

Wang, C., Pan, G., Tong, T., and Zhu, L. (2015). Shrinkage estimation of large precision matrix using random matrix theory. Statistica Sinica. 25, 993-1008.