経路としての確率分布とそのエネルギー

東京国際大学経済　竹内 宏行

1. 最小作用の原理 -統計学への導入-

最小作用の原理 (the principle of least action) は力学・制御理論等における基本的な指導原理である．本報告はこの原理の統計学への導入可能性を述べる．物体の運動は作用を最小にする経路 (古典軌道) に従うことを主張するこの原理では，汎関数である作用積分を停留させるような経路を変分法によって見出す．このとき**経路に対するエネルギーの定義**，および**関数空間上の Gâteaux 微分**が必要とされる．

2. 確率分布にエネルギーを定義する

法則収束する確率分布列に対しエネルギーと作用積分を定義する際，以下 3 つの点を考慮すべきである．(i) 経路として扱うことができる確率分布のクラス $\mathscr{P}$ を明確に示す．(ii) 極限分布は作用積分の停留点であり，(iii) そのエネルギーは最小な状態となっている．Gibbs の変分原理における平衡状態の導出において大偏差原理が重要な役割りを果たすが，そこではキュムラント母関数のルジャンドル変換 $K_F^*(t) = t\alpha_F(t) - K_F(\alpha_F(t))$ が**自由エネルギー**として定義される．ただし α_F は分布 $F \in \mathscr{P}$ に対応する**鞍点**である．本研究では作用積分 (action integral) を次のように定義する．

定 義 1. 確率分布 $G \in \mathscr{P}$ の鞍点を α_G とする．次の汎関数

$$A_F[\alpha_G] = -\int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \{t\alpha_G(t) - K_F(\alpha_G(t))\}\, dt \tag{1}$$

を**分布 F に関する G の作用積分**と呼ぶ．μ は F の期待値，$\delta > 0$ は十分小さな数である．

3. 確率分布は経路として扱うことができる

確率分布の代わりに鞍点を経路として考えることで，分布自身のエネルギーを定義することができる．鞍点はキュムラント母関数に関するルジャンドル変換の導関数であり，期待値の近傍における振る舞いで確率分布と一意に対応する (竹内 [1])．従って経路として扱えるクラス $\mathscr{P}$ は，この一意性を与える十分条件によって規定される．この結果 $\mathscr{P}$ の元である確率分布は変分法における経路 (path) として取り扱うことが可能になる．

本報告では中心極限定理や経験分布関数列に関する収束を作用積分 (1) の立場から示すが，これらは最小作用の原理による極限定理の評価である．また多変量確率ベクトルの場合への拡張について言及する．

参考文献

[1] 竹内 宏行 (2013). 鞍点と確率分布の対応について, 日本統計学会誌 第 42 巻.

[2] Hiroyuki Takeuchi (2019). Probability distribution as a path and its energy, (submitting for publication).