

期待ミンコフスキー汎関数の摂動展開とその応用

栗木哲 (統計数理研究所), 松原隆彦 (高エネルギー加速器研究機構)

$X(t)$ を $E \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかなサンプルパスを持つ実数値確率場とする. $X(t)$ の閾値 x に対する上側レベル集合 $E_x = \{t \in E \mid X(t) \geq x\}$ をエクスカージョン集合という. B^n を n 次元単位球とし, E_x の半径 r のチューブ近傍 $E_x + rB^n$ を考える. その体積は r が小さい範囲で r の多項式

$$\text{Vol}_n(E_x + rB^n) = \sum_{j=0}^n r^j \binom{n}{j} \mathcal{M}_j(E_x)$$

となることが知られている. 係数 $\mathcal{M}_j(E_x)$ を E_x の j 次ミンコフスキー汎関数という (Schneider, 2013). これは E_x の体積や表面積を特別な場合として含む幾何量である. 最高次数のミンコフスキー汎関数はオイラー標数の定数倍 $\mathcal{M}_n(E_x) = \text{Vol}_n(B^n)\chi(E_x)$ に一致する.

$X(t)$ が平均 0 の等方的ガウス確率場の場合の $\mathcal{M}_j(E_x)$ の期待値は陽に知られている (Tomita, 1986; Adler & Taylor, 2009). 平均 0 の等方的ガウス確率場は, 距離のみで定義される 2 点相関関数 (共分散関数) $\mathbb{E}[X(s)X(t)] = \rho(\|s - t\|^2/2)$ で特徴づけられる. 本報告では 3 点相関関数 (3 次キュムラント関数)

$$\mathbb{E}[X(s)X(t)X(u)] = \kappa(\|s - t\|^2/2, \|s - u\|^2/2, \|t - u\|^2/2)$$

($\kappa(x, y, z)$ は x, y, z について対称) が非零であるがあまり大きくないと仮定し, $\mathbb{E}[\mathcal{M}_j(E_x)]$ の摂動展開を論じる. 添字集合 E の境界の効果を無視するために, E が十分に大きい状況を考え $\overline{\mathcal{M}}_j(x) = \lim_{E \nearrow \mathbb{R}^n} \mathcal{M}_j(E_x)/\text{Vol}_n(E)$ とおく. $\rho(0) = \mathbb{E}[X(t)^2] = 1$ とする.

定理 1. $\gamma = -\rho'(0)$, $\kappa_0 = \kappa(0, 0, 0)$, $\kappa_1 = \frac{\partial \kappa(x, 0, 0)}{\partial x}|_{x=0}$, $\kappa_{11} = \frac{\partial^2 \kappa(x, y, 0)}{\partial x \partial y}|_{x=y=0}$ とおく.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\overline{\mathcal{M}}_j(x)] &= \gamma^{j/2} 2^{-j/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j)+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \times \left[h_{j-1}(x) \right. \\ &\quad + (1/2)\gamma^{-2}\kappa_{11}j(j-1)h_{j-2}(x) \\ &\quad - (1/2)\gamma^{-1}\kappa_1jh_j(x) \\ &\quad \left. + (1/6)\kappa_0h_{j+2}(x) + o(\kappa) \right] \times \phi(x), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

ここで $\phi(x)$ は標準ガウス密度関数, $h_j(x)$ はエルミート多項式.

証明は, 原点における確率場およびその 1, 2 階導関数 ($X(0), \nabla X(0), \nabla^2 X(0)$) ($1+n+n(n+1)/2$ 次元ベクトル) のグラムシャリエ展開にもとづく.

宇宙論においては宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) のガウス性の検定統計量としてミンコフスキー汎関数が古くから用いられている. また宇宙の大規模構造の解析にも用いられる. Matsubara (2003) は, 非ガウス性のもとの統計量の挙動を調べるために, 次元が $n = 2, 3$ の場合について期待ミンコフスキー汎関数の摂動展開を与えている. 定理 1 はその一般化である.

また確率場のエクスカージョン集合のオイラー標数の期待値は, その確率場の最大値の上側裾確率の近似

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in E} X(t) \geq x\right) \approx \text{Vol}_n(E) \mathbb{E}[\overline{\mathcal{M}}_n(x)] / \text{Vol}_n(B^n) \quad (x \text{ が大きいとき})$$

を与える (オイラー標数法). 特に確率場がガウスの場合の近似式は VBM 脳画像データ解析で p 値の多重性調整のために用いられている. 定理 1 は, ガウス性から乖離をもつ確率場の最大値の近似式を与える. 講演では, 定理証明のアウトラインとこれらの応用や数値例について説明する.