高頻度データに基づく線形放物型確率偏微分方程式モデルのパラメータ推定

大阪大学基礎工学研究科 貝野友祐
大阪大学基礎工学研究科 内田雅之

1 モデルと推定量

本研究では，線形放物型確率偏微分方程式（SPDE）モデル

$$dX_t(y) = \left(\theta_2 \frac{\partial^2 X_t(y)}{\partial y^2} + \theta_1 \frac{\partial X_t(y)}{\partial y} + \theta_0 X_t(y)\right) dt + \sigma dB_t(y), \quad (t,y) \in [0,1] \times [0,1],$$
$$X_t(0) = X_t(1) = 0, \quad t \in [0,1], \qquad X_0(y) = 0, \quad y \in [0,1]$$

の係数パラメータの推定について考える．B_t は $[0,1]$ 上の柱状ブラウン運動である．$\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2, \sigma > 0$ とする．観測データを $\mathbf{X}_{N,M} = (X_{t_{i:N}}(y_{j:M}))_{i=1,\dots,N,j=1,\dots,M}$, $t_{i:N} = i\Delta_N$, $\Delta_N = \frac{1}{N}$, $y_{j:M} = \delta + (1-2\delta)\frac{j}{M}$, $\delta > 0$ とする．また，$m \le M$, $\tilde{y}_{j:m} = \left[\frac{M+1}{m+1}\right] y_{j:M}$, $j = 1, ..., m$ とする．$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\theta_2}}, \eta = \frac{\theta_1}{\theta_2}$ とし，σ_0^2 を正規化ボラティリティ，η を曲率パラメータと呼ぶことにする．

Bibinger and Trabs (2017) はコントラスト関数

$$\mathcal{U}_{N,m}(\sigma_0^2, \eta) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\mathcal{Z}_{j:m} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma_0^2 \exp(-\eta \tilde{y}_{j:m})\right)^2$$

を構成した．ここで，$\mathcal{Z}_{j:m} = \frac{1}{N\sqrt{\Delta_N}}\sum_{i=1}^{N}(X_{t_{i:N}}(\tilde{y}_{j:m}) - X_{t_{i-1:N}}(\tilde{y}_{j:m}))^2$ である．そして，彼らは，正規化ボラティリティσ_0^2 および曲率パラメータ η に対する最小コントラスト推定量 $(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\eta}) = \underset{\sigma_0^2,\eta}{\arg\inf}\, \mathcal{U}_{N,m}(\sigma_0^2, \eta)$ を導出し，正則条件の下で，最小コントラスト推定量 $(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\eta})$ が漸近正規性を持つことを証明した．本研究では， 観測データ $\mathbf{X}_{N,M}$ と曲率パラメータ η の最小コントラスト推定量 $\hat{\eta}$ を用いて座標過程（Ornstein-Uhlenbeck 過程）の近似過程を導出し， 得られた近似過程から座標過程の拡散係数パラメータ σ^2 の疑似最尤推定量 $\hat{\sigma}^2$ を求める．次に，$(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\eta})$ と $\hat{\sigma}^2$ を組み合わせることで， SPDE モデルの係数パラメータの推定量を導出し， 得られた推定量の漸近的性質を示す．さらに，$T > 0$ が大きい場合の $[0, T] \times [0, 1]$ 上での SPDE モデルの係数パラメータの推定についても言及する．

2 数値シミュレーション

$N = 10^4$, $M = 10^4 - 1$ として，SPDE の数値解を発生させ， 高頻度データに基づいた大規模数値シミュレーションを行う．具体的には，最小コントラスト推定量 $(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\eta})$ および係数パラメータの推定量を計算し，その漸近挙動を検証する．また，SPDE の数値解の近似精度を決定するチューニングパラメータについて言及し，数値シミュレーションにおいて，そのチューニングパラメータが推定量の漸近挙動にどのような影響を与えるかについて考察する．

参考文献

[1] Bibinger, M, and Trabs, M. (2017). Volatility estimation for stochastic PDEs using high-frequency observations. arXiv:1710.03519.