

エルゴード的確率微分方程式におけるモデル評価

大阪大学 江口 翔一
統計数理研究所 上原 悠慎

候補モデルとして確率微分方程式を扱うモデル選択に対して、エルゴード拡散過程における AIC 型情報量規準 (CIC) や LAQ モデルにおける Schwarz 型情報量規準 (BIC, quasi-BIC) の導出など様々な理論的研究が行われている。しかし、確率微分方程式におけるモデル誤特定性や Lévy 駆動型確率微分方程式を扱うことができる状況でモデル評価について言及した研究は少ない。本発表では、エルゴード的確率微分方程式において拡散過程や Lévy 過程、モデル誤特定の場合まで統一的に扱うことができる Schwarz 型モデル評価基準の提案を行う。

モデル評価の対象として、次の 1 次元エルゴード的確率微分方程式モデルを考える。

$$dX_t = a(X_t, \alpha)dt + c(X_{t-}, \gamma)dZ_t.$$

c は $\mathbb{R} \times \Theta_\gamma$ 上の $\mathbb{R}$ -値関数, a は $\mathbb{R} \times \Theta_\alpha$ 上の $\mathbb{R}$ -値関数, $\theta = (\gamma, \alpha) \in \Theta_\gamma \times \Theta_\alpha \subset \mathbb{R}^{p_\gamma} \times \mathbb{R}^{p_\alpha}$, Z は 1 次元標準 Wiener 過程または任意の $q(>0)$ に対して $E[Z_1] = 0$, $E[Z_1^2] = 1$, $E[|Z_1|^q] < \infty$ をみたす Lévy 過程とする。また、データは離散観測であり、 $\mathbf{X} = (X_{t_j})$ とし、 $T_n = nh_n \rightarrow \infty$ であり、 $nh_n^2 \rightarrow 0$ をみたす。このとき、パラメータ $\theta = (\gamma, \alpha)$ の推定値 $\hat{\theta}_n = (\hat{\gamma}_n, \hat{\alpha}_n)$ は、段階的 Gauss 型対数擬似尤度関数 $\mathbb{G}_{1,n}$, $\mathbb{G}_{2,n}$ を用いて以下のように二段階で求めることができる ([1]):

$$(i) \hat{\gamma}_n \in \operatorname{argmax}_\gamma \mathbb{G}_{1,n}(\gamma). \text{ ただし, } \mathbb{G}_{1,n}(\gamma) = -\frac{1}{h_n} \sum_{j=1}^n \left\{ h_n \log c^2(X_{t_{j-1}}, \gamma) + \frac{(\Delta_j X)^2}{c^2(X_{t_{j-1}}, \gamma)} \right\}.$$
$$(ii) \hat{\alpha}_n \in \operatorname{argmax}_\alpha \mathbb{G}_{2,n}(\alpha). \text{ ただし, } \mathbb{G}_{2,n}(\alpha) = -\sum_{j=1}^n \frac{\{\Delta_j X - h_n a(X_{t_{j-1}}, \alpha)\}^2}{h_n c^2(X_{t_{j-1}}, \hat{\gamma}_n)}.$$

ここで、 $\Delta_j X = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ である。この段階的 Gauss 型対数擬似尤度関数 $\mathbb{G}_{1,n}$, $\mathbb{G}_{2,n}$ それぞれにおいて対数周辺擬似尤度の確率展開式を導出し、その発散項に着目することにより、二段階擬似 Bayes 情報量規準

$$\begin{aligned} \text{QBIC}_{1,n} &= -2\mathbb{G}_{1,n}(\hat{\gamma}_n) + p_\gamma \log n, \\ \text{QBIC}_{2,n} &= -2\mathbb{G}_{2,n}(\hat{\alpha}_n) + p_\alpha \log T_n \end{aligned}$$

を得る。擬似 Bayes 情報量規準を利用したモデル選択の手法として、一段階目として $\text{QBIC}_{1,n}$ を用いたスケール項 c の選択を行い、一段階目の結果の下で $\text{QBIC}_{2,n}$ を用いたドリフト項 a の選択を行う。各候補ごとに $\text{QBIC}_{1,n}$ 及び $\text{QBIC}_{2,n}$ を計算し、それが最小となるものを最適な係数として選択する。当日は数値実験例を提示する。

参考文献

- [1] Uehara, Y. (2018). Statistical inference for misspecified ergodic lévy driven stochastic differential equation models. *Stochastic Processes and their Applications*, 2018.