Vector measure of departure from partial symmetry-asymmetry for square contingency tables

東京理科大学大学院理工学研究科　桃﨑 智隆
東京理科大学理工学部　中川 智之
東京理科大学理工学部　石井 晶
横浜市立大学医学部　三枝 祐輔
東京理科大学理工学部　富澤 貞男

正方 $r \times r$ 分割表を考え, (i,j) セル確率を p_{ij} とする $(i=1,\ldots,r;\ j=1,\ldots,r)$. $p_{ij}+p_{ji}>0$ を仮定する. Saigusa *et al.* (2016) は部分対称 (PS) モデルを提案した: 少なくとも 1 組の $i<j$ に対して, $p_{ij}=p_{ji}$. $p^c_{ij}=p_{ij}/(p_{ij}+p_{ji})$, $p^*_{ij}=p_{ij}/\delta$, $\delta=\sum\sum_{i\neq j}p_{ij}$ とおく. Saigusa *et al.* (2016) はそのモデルからの隔たりを測る尺度を提案した:

$$\Phi^{(\lambda)}=\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=i+1}^{r}\left[\phi^{(\lambda)}_{ij}\right]^{(p^*_{ij}+p^*_{ji})}\quad(\lambda>-1),$$

ただし,

$$\phi^{(\lambda)}_{ij}=1-\frac{\lambda 2^{\lambda}}{2^{\lambda}-1}H^{(\lambda)}_{ij},\quad H^{(\lambda)}_{ij}=\frac{1}{\lambda}\left[1-(p^c_{ij})^{\lambda+1}-(p^c_{ji})^{\lambda+1}\right].$$

本講演では, 新しいモデルと 2 つの尺度を提案する:

(1) 部分完全非対称 (PAS) モデル:

$$\text{少なくとも 1 組の } i<j \text{ に対して, } p^c_{ij}=1 \text{ または } p^c_{ji}=1$$

(2) PAS モデルからの隔たりを測る尺度:

$$\tau^{(\lambda)}=\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=i+1}^{r}\left[1-\phi^{(\lambda)}_{ij}\right]^{(p^*_{ij}+p^*_{ji})}\quad(\lambda>-1)$$

(3) ベクトル型尺度:

$$\mathbf{\Lambda}^{(\lambda)}=\left(\Phi^{(\lambda)},\tau^{(\lambda)}\right)^{\top}\quad(\lambda>-1)$$

$\mathbf{\Lambda}^{(\lambda)}$ は次の性質を満たす:

(i) $\mathbf{\Lambda}^{(\lambda)}=(0,0)^{\top}\Leftrightarrow$ PS モデルと PAS モデルが同時に成立

(ii) $\mathbf{\Lambda}^{(\lambda)}=(0,1)^{\top}\Leftrightarrow$ 対称モデル (すべての $i<j$ に対して $p_{ij}=p_{ji}$) が成立

(iii) $\mathbf{\Lambda}^{(\lambda)}=(1,0)^{\top}\Leftrightarrow$ 完全非対称モデル (すべての $i<j$ に対して $p^c_{ij}=1$ または $p^c_{ji}=1$) が成立

推定尺度 $\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{(\lambda)}$ は近似的に $N(\mathbf{\Lambda}^{(\lambda)},n^{-1}\Sigma^{(\lambda)})$ に従う ($n=\sum_{i,j}n_{ij}$, n_{ij} は (i,j) セル度数). $\Sigma^{(\lambda)}$ は当日示す. $\mathbf{\Lambda}^{(\lambda)}$ の信頼楕円を用いたデータ解析については当日示す.

参考文献

Saigusa, Y., Tahata, K. and Tomizawa, S., 2016, *Journal of Mathematics and Statistics,* **12**, 152-156.