

拡散過程の積分観測モデルの局所漸近混合正規性

東京大学 荻原 哲平
大阪大学 深澤 正彰

パラメータ付確率微分方程式：

$$dX_t = b(t, X_t, \sigma)dt + a(t, X_t, \sigma)dW_t, \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

を満たす拡散過程 $X = (X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ を考える．ここで W_t は標準ブラウン運動， a, b は既知の関数で σ は未知パラメータとする． $(X_{k/n})_{k=0}^n$ を観測する時，パラメータの最尤型推定法が Genon-Catalot and Jacod [1] で提案され，漸近混合正規性や漸近有効性等の推定量の漸近的性質が研究されてきた．本研究では， X_t を直接観測せずに積分値過程：

$$Y_t = \int_0^t X_s ds \quad (2)$$

の離散観測データ $(Y_{k/n})_{k=0}^n$ が与えられている時のパラメータ推定問題を考える．

このような拡散過程の積分値を観測する統計モデルは，分子運動を記述する Langevin 方程式：

$$\begin{cases} mdX_t = -\nabla q(Y_t)dt - \gamma X_t dt + \sigma dW_t \\ dY_t = X_t dt \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (3)$$

に応用される．ここで X_t, Y_t はそれぞれ分子の測度と位置を表し， m は分子の質量， γ は抵抗係数， q はポテンシャルを表す．位置情報 Y_t の離散観測から方程式のパラメータを推定する問題は積分観測モデルに帰着される．また，積分観測モデルは計量ファイナンスにおいて株価変動を記述する確率ボラティリティのパラメータ推定にも応用される．

このような積分観測モデルは Gloter and Gobet [2] において， X が一次元の場合に (1),(2) のパラメータ・モデルに対して統計モデルの漸近混合正規性 (local asymptotic mixed normality, LAMN) が示されている．LAMN の下，任意の推定量の漸近分散の下界が与えられるため，推定量の漸近有効性（漸近分散の最適性）を議論する上で重要な性質となる．[2] では (X_t, Y_t) の推移確率密度関数に対して正規確率密度を使った上と下からの不等式評価を用いており， X が二次元以上の場合にはこのような推移確率密度の不等式を得られないため，多次元への拡張が困難となる．

本研究では，Jeganathan [3] の L^2 regularity condition を用いた手法により推移確率密度の不等式評価を使わない方法で多次元積分観測モデルの LAMN を示した．また，Langevin 方程式への適用を可能にするため，(1),(2) のモデルを拡張し，

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, Y_t, \sigma)dt + a(t, X_t, Y_t, \sigma)dW_t \\ dY_t = X_t dt \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (4)$$

としたモデルに対して LAMN を示した．さらに最尤型推定量を構築し，実際に漸近有効性をもつという結果を紹介する．

参考文献

- [1] V. Genon-Catalot and J. Jacod. On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 29(1):119–151, 1993.
- [2] A. Gloter and E. Gobet. LAMN property for hidden processes: the case of integrated diffusions. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(1):104–128, 2008.
- [3] P. Jeganathan. On the asymptotic theory of estimation when the limit of the log-likelihood ratios is mixed normal. *Sankhyā Ser. A*, 44(2):173–212, 1982.