Moment matching priors for non-regular cases

広島大学大学院理学研究科　橋本 真太郎

$X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度関数 $f(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1)$ をもつ確率変数列とする．ただし，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，$f(x;\theta)$ は未知母数 θ に依存する閉区間 $S(\theta) := [a_1(\theta), a_2(\theta)]$ において正値で，$S(\theta)$ の外側では値 0 をとるとし，区間の端点のうちの 1 つは θ に無関係あるいは $\pm\infty$ であってもよいとする．また，一般性を失うことなく $S(\theta)$ は θ に関して単調減少であると仮定する．また，θ の事前密度を $\pi(\theta)$ とし，$X := (X_1, \ldots, X_n)$ を与えたときの θ の事後分布の漸近展開の妥当性を保証するような条件が成り立つとする (e.g., Ghosal (1999, Biometrika))．θ の一致推定量として $\hat{\theta}_n = \min\{a_1^{-1}(X_{(1)}), a_2^{-1}(X_{(n)})\}$ を考える．ただし，$X_{(1)} = \min_{1\le i\le n} X_i$, $X_{(n)} = \max_{1\le i\le n} X_i$ とし，$\hat{\theta}_n - \theta = \mathrm{O}_p(n^{-1})$ $(n \to \infty)$ であることに注意する．さらに，$\sigma := n^{-1}\sum_{i=1}^n (\partial/\partial\theta)\log f(X_i;\hat{\theta}_n)$ とおくと，$\sigma - c(\theta) = \mathrm{O}_p(n^{-1})$ $(n\to\infty)$ が成り立つ．ただし，$0 < c(\theta) := \mathrm{E}_\theta[(\partial/\partial\theta)\log f(X_i;\theta)] < \infty$ である．このとき X を与えたもとでの $u = n\sigma(\theta - \hat{\theta}_n)$ の事後分布は次のような漸近的表現をもつ：

$$\pi(u|X) = \mathrm{e}^u \left[1 + n^{-1}\left\{\frac{\pi'(\hat{\theta}_n)}{\sigma\pi(\hat{\theta}_n)}(u+1) + \frac{c_2}{\sigma^2}(u^2-2)\right\} + \mathrm{O}_p(n^{-2})\right] \quad (u<0).$$

ただし，$c_2 := (2n)^{-1}\sum_{i=1}^n (\partial^2/\partial\theta^2)\log f(X_i;\hat{\theta}_n)$ とする．

定理. $\hat{\theta}^B_{n,\pi}$ を二乗損失関数のもとでの θ のベイズ推定量とし，$\hat{\theta}^*_n := \hat{\theta}_n - \{1/(\sigma n)\}$ を θ のバイアス補正最尤推定量 (MLE) とする．適当な条件のもとで，$\hat{\theta}^B_{n,\pi}$ と $\hat{\theta}^*_n$ の間の漸近的な差異は次で与えられる：

$$\hat{\theta}^B_{n,\pi} - \hat{\theta}^*_n = n^{-2}\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\pi'(\hat{\theta}_n)}{\pi(\hat{\theta}_n)} - \frac{4c_2}{\sigma}\right)\right\} + \mathrm{O}_p(n^{-3}).$$

そこで，適当な条件のもとで，$n^2(\hat{\theta}^B_{n,\pi} - \hat{\theta}^*_n) \xrightarrow{p} c(\theta)^{-2}\left[\{\pi'(\theta)/\pi(\theta)\} - \{2d(\theta)/c(\theta)\}\right]$ が成り立つことを用いて，$\pi(\theta)$ を

$$\pi(\theta) = \exp\left(2\int^\theta \frac{d(t)}{c(t)}\mathrm{d}t\right)$$

のように選ぶと，この事前分布のもとでは，$\hat{\theta}^B_{n,\pi} - \hat{\theta}^*_n = \mathrm{O}_p(n^{-3})$ が成り立つ．ここで，$d(\theta) = \mathrm{E}_\theta[(\partial^2/\partial\theta^2)\log f(X_i;\theta)] < \infty$ とする．つまり，この事前分布から導かれるベイズ推定量は 2 次のオーダーまでバイアス補正 MLE と漸近的に同等となる．これを θ の moment matching prior とよび，ベイズ統計学における客観的な事前分布の選択法の一つとして知られている．Ghosh and Liu (2011, Sankhya) は正則な場合に同様の事前分布を導出しているが，正則・非正則な場合ともに母数の一対一変換に対する不変性は持たないという問題点は有する．当日は，局外母数を持つような多母数への拡張について紹介する．また，得られる事前分布は一般に improper であるためいくつかの具体例において事後分布の propriety を証明する．

参考文献

[1] Hashimoto, S. (2019). Moment matching priors for non-regular models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **203**, 169–177.