

多次元分割表の種々の独立性モデルの関係について

北海道教育大 札幌 種市信裕 北海道教育大 釧路 関谷祐里 数学利用研究所 外山淳

1 はじめに: 多次元分割表の種々の要因グループ間独立性, および条件付き独立性モデルの関係を示す. 次に, これらの関係を用いて, 多次元分割表の完全独立性検定統計量の分布の漸近展開に基づく近似の容易な修正により, 漸近展開に基づく検定統計量の分布の近似が導出できる多次元分割表の独立性モデルについての考察をおこなう.

2 3次元分割表における種々の独立性モデル: 3次元の $J \times K \times L$ 分割表において多項分布モデルを考える. (j, k, l) セルの観測度数を表す確率変数を X_{jkl} , セル確率を p_{jkl} とする. ただし, X_{jkl} ($j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K, l = 1, \dots, L$) は, $\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L X_{jkl} = n$ を満たす非負整数の値を取り, 自然数 n は定数とする. また, p_{jkl} は, $0 < p_{jkl} < 1, \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L p_{jkl} = 1$ を満たすものとする. このとき, 確率変数ベクトル $X = (X_{111}, \dots, X_{JKL})^T$ が多項分布 $\mathcal{M}_{JKL}(n, p)$ に従う場合について考える. ここで, $p = (p_{111}, \dots, p_{JKL})^T$ である. 次に, 周辺確率を以下のように定義する. $p_{j..} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L p_{jkl}$, $p_{.k.} = \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L p_{jkl}$, $p_{..l} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K p_{jkl}$, $p_{jk.} = \sum_{l=1}^L p_{jkl}$, $p_{j.l} = \sum_{k=1}^K p_{jkl}$, $p_{.kl} = \sum_{j=1}^J p_{jkl}$. このとき, この $J \times K \times L$ 分割表に関する以下の仮説に基づく独立性モデルを考える. (1) $H_0^{(1)} : p_{jkl} = p_{j..} \cdot p_{.k.} \cdot p_{..l}$ (2) $H_0^{(2)} : p_{jkl} = p_{jk.} \cdot p_{.l}$ (3) $H_0^{(3)} : p_{jkl} = p_{j.l} \cdot p_{.kl} / p_{..l}$

(1) は完全独立性のモデル, (2) は1要因対2要因の独立性のモデル, (3) は条件付き独立性のモデルである. $H_0^{(1)}, H_0^{(2)}, H_0^{(3)}$ の各々の帰無仮説を検定するための各検定統計量の $n \rightarrow \infty$ としたときの極限分布は, それぞれある自由度をもつカイ二乗分布である.

3 分割表の独立性モデルの関係: ところで, 3次元の $J \times K \times L$ 分割表におけるセル確率 p_{jkl} において, $i = (j-1)K + k$, ($j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$) とおき, p_{il} ($i = 1, \dots, JK, l = 1, \dots, L$) を考えると, 3次元分割表の1要因対2要因の独立性モデル(2)は, 2次元の $JK \times L$ 分割表の独立性モデルに帰着する. このようなことから, Kobe et al. [1] によって導出された3次元分割表の1要因対2要因の独立性帰無仮説のもとでの検定統計量の分布の漸近展開の結果は, Taneichi and Sekiya [2] により導出された2次元分割表の独立性検定統計量の分布の漸近展開の結果からの容易な修正として導出することができる. これを一般化すると, M 次元分割表のすべての要因グループ間独立性検定統計量の漸近展開に基づく近似は, M 次元以下の分割表の完全独立性検定統計量の分布の漸近展開による近似の容易な修正により導出できる. また, 一要因または一つの要因グループに関して条件のついた2つの要因グループ間の条件付き独立性検定統計量の漸近展開による近似は Taneichi et al. [3] により導出された条件付き検定統計量の分布の漸近展開による近似の容易な修正により導出できることがわかる. 逆に, 1要因対2要因の独立性検定統計量の漸近展開からは完全独立性検定統計量の分布の漸近展開による近似は導くことはできない.

参考文献

- [1] KOBE, T., TANEICHI, N. AND SEKIYA, Y. (2015). *Journal of the Japan Statistical Society*, **45** (1), 77–98.
- [2] TANEICHI, N. AND SEKIYA, Y. (2007). *Journal of Multivariate Analysis*, **98**, 1630–1657.
- [3] TANEICHI, N., SEKIYA, Y. AND TOYAMA, J. (2019). *Journal of Multivariate Analysis*, **171**, 193–208.