不均一性をもつポアソン分布の母数の同時推定

東京大学・経済・修士 2 年　羽村靖之
東京大学・経済・教授　久保川達也

1　はじめに

互いに独立な確率変数 $X_1, \dots, X_m$ がそれぞれ平均 $n_1\lambda_1, \dots, n_m\lambda_m$ のポアソン分布に従っているとする（ $m \in \{1, 2, \dots\}$ ）。ここで、$n_1, \dots, n_m$ は既知の正定数であり、 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in (0, \infty)^m$ が未知の母数であるとし、 $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots X_m)$ に基づいて $\boldsymbol{\lambda}$ を推定することを考える。推定量の評価には、標準化された二乗損失を用いる。$n_1, \dots, n_m$ が共通とは限らないという意味で、分布の設定が不均一である。 Clevenson and Zidek [1] は、 $n_1 = \cdots = n_m = 1$ の場合を扱っている。

基本的な推定量として、最尤推定量 $(X_1/n_1, \dots, X_m/n_m)$ が挙げられる。最尤推定量は、 n_i が小さいとき i 番目の成分の推定値のばらつきが大きくなる（ $i = 1, \dots, m$ ）という問題点を持つ。そこで、

$$\Bigl(\frac{X_1}{n_1} \cdot \{1 - \phi_1(\boldsymbol{X})\}, \dots, \frac{X_m}{n_m} \cdot \{1 - \phi_m(\boldsymbol{X})\}\Bigr), \quad \phi_1, \dots, \phi_m \colon \{0, 1, 2, \dots\}^m \to (0, 1)$$

という形の縮小推定量を用いて推定を安定させることが考えられる。さらに、分布の不均一性に即して、不均一な縮小推定量、即ち、各 $i, j = 1, \dots, m$ について $n_i < n_j$ ならば $\phi_i > \phi_j$ となるような縮小推定量を用いることが考えられる。

2　研究内容

まず、 Komaki [2] の事前分布のクラスを用いて導出された縮小型一般化ベイズ推定量のクラスを紹介する。その中には、不均一な縮小推定量が含まれている。導出された一般化ベイズ推定量が最尤推定量を改良してミニマックスとなるための十分条件を与える。次に、シミュレーションにより損失の期待値を計算した結果を紹介する。理論的に得られた十分条件が満たされていないときの一般化ベイズ推定量の性能について確認する。また、不均一な縮小率を持つ推定量と均一な縮小率を持つ推定量の性能を比較する。最後に、事前分布のクラスを拡張することにより得られた推定量のクラスを紹介する。ミニマックスかつ proper で不均一な縮小型ベイズ推定量を構成できる場合があることを説明する。

参考文献

[1] Clevenson, M.L. and Zidek, J.V. (1975). Simultaneous estimation of the means of independent Poisson laws. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **70**, 698-705.

[2] Komaki, F. (2015). Simultaneous prediction for independent Poisson processes with different durations. *J. Multivariate Anal.*, **141**, 35-48.