

# On the asymptotic structure of Brownian motions with a small lead-lag effect

東京大学 数理・情報教育研究センター 小池祐太

計量ファイナンスにおいて、2つの時系列間に時間差をもって現れる相関関係はリード・ラグ効果 (lead-lag effect) と呼ばれる。本報告では、リード・ラグ効果をもつ2つの金融資産の対数価格系列を、時間差あり相関をもつ2次元 Brown 運動の観測誤差つき離散観測データとモデル化した場合に、そのタイムラグ・パラメータを推定する問題に関する理論的結果をいくつか導く。記号を使って述べると、2つの金融資産の観測データ  $(X_i)_{i=1}^n, (Y_i)_{i=1}^n$  が以下で与えられる状況を考える:

$$\begin{cases} X_i = B_{i/n}^1 + \sqrt{v_n}\epsilon_i^1, & Y_i = B_{i/n-\vartheta}^2 + \sqrt{v_n}\epsilon_i^2 & \text{if } \vartheta \geq 0, \\ X_i = B_{i/n-|\vartheta|}^1 + \sqrt{v_n}\epsilon_i^1, & Y_i = B_{i/n}^2 + \sqrt{v_n}\epsilon_i^2 & \text{if } \vartheta < 0. \end{cases}$$

ここに、 $B_t = (B_t^1, B_t^2)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) は2次元標準(両側)Brown 運動であり、 $B_0 = 0$ ,  $E[(B_1^1)^2] = E[(B_1^2)^2] = 1$  および  $E[B_1^1 B_1^2] = \rho \neq 0$  を満たす;  $\epsilon^k$   $i.i.d.$   $N(0, 1)$  ( $k = 1, 2$ ) は観測誤差のイノベーションであり、 $\epsilon^1$  と  $\epsilon^2$  は互いに独立である;  $v_n \geq 0$  は観測誤差の分散であり、 $\vartheta \in \mathbb{R}$  はタイムラグパラメータである。このモデルは [1] で提案されたリード・ラグ効果のモデルを単純化したものに観測誤差を加えた形となっている。高頻度金融データの文脈では、このような観測誤差は「マイクロストラクチャーノイズ」と呼ばれ、通常モデルにマイクロストラクチャーノイズを加えた問題を考える拡張は標準的な議論である。

さて、いま  $\vartheta \geq 0$  であったとすると、 $Y_i$  は  $Y_i = B_{i/n}^2 - (B_{i/n}^2 - B_{i/n-\vartheta}^2) + \sqrt{v_n}\epsilon_i^2$  のように書き直せる。この書き方では、“ $-(B_{i/n}^2 - B_{i/n-\vartheta}^2) + \sqrt{v_n}\epsilon_i^2$ ” の部分が新たなマイクロストラクチャーノイズのように見え、リード・ラグ効果はマイクロストラクチャーノイズと潜在価格過程のリターンに相関を与える効果を担っているように見える。特に、タイムラグ・パラメータ  $\vartheta$  はモーメント型の推定量で推定できるのではないかという示唆を与える。実際、 $\vartheta$  が微小である場合にそのような推定量を構成することが可能で、推定量の収束レートが  $n^{-3/4}$  となることが示されている [2]。これらの考察から次の2つの疑問が生じる:

1. リード・ラグ効果と潜在リターン-マイクロストラクチャーノイズ間の相関を関連づける理論的根拠は存在するか?
2. 上述の収束レート  $n^{-3/4}$  は最適か?

本報告ではこれら2つの問題に肯定的な解答を与える。さらに、観測誤差がある場合とない場合に、問題の構造に本質的な違いが現れることも示す。

## 参考文献

- [1] Hoffmann, M., Rosenbaum, M. & Yoshida, N. (2013). Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data. *Bernoulli* **19**, 426–461.
- [2] Koike, Y. (2017). Inference for time-varying lead-lag relationships from ultra high frequency data. Working paper. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2924301>.