

局所定常 Hawkes 過程のグラフによる可視化

慶應義塾大学理工学部

白石 博

慶應義塾大学理工学研究科

宇野 大我

慶應義塾大学理工学研究科

泉澤 佑

新潟大学理学部

蛭川 潤一

Hawkes graph は多変量 Hawkes 過程の特徴を視覚化する手法として, Embrechts and Kirchner (2017) によって提案された。一方, Hawkes 過程は定常性を仮定するため, 伝播の構造の時間変化を捉える事が出来ないという問題点がある。本報告では, Roueff et al. (2016) によって提案された局所定常 Hawkes 過程を多変量に拡張したモデルのパラメータ推定問題を考え, その構造を可視化する手法を提案する。

定義 1. (多変量局所定常 Hawkes 過程) ある $d \in \mathbb{N}$ に対し, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}^d \setminus \{\mathbf{0}_d\}$ を d 次元ベクトル値関数, $H = (h_{i,j}) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}^{d \times d}$ を $d \times d$ 行列値関数とする。 d 変量点過程 $(\mathbf{N}_T = (N_{1,T}, \dots, N_{d,T}))_{T>0}$ が局所定常 Hawkes 過程にしたがうとは, 強度関数 $\boldsymbol{\Lambda}_T$ が次式で表すことができることを言う。

$$\boldsymbol{\Lambda}_T(t) = \boldsymbol{\eta}\left(\frac{t}{T}\right) + \int_{-\infty}^t H\left(t-s; \frac{t}{T}\right) \mathbf{N}_T(ds), \quad t \in \mathbb{R}$$

今, 上記で定義した d -変量局所定常 Hawkes 過程から, 次の通り離散観測されていると仮定する。

$$\{\mathbf{N}_T((0, 1]), \mathbf{N}_T((1, 2]), \dots, \mathbf{N}_T((T-1, T])\}$$

この離散確率変数列 $\{\mathbf{N}_T((t-1, t])\}$ は, 次式で定義する d -変量時変 INAR(integer-valued autoregressive) 過程 $\{\mathbf{X}_{t,T}^{(p)}\}$ と漸近的に同等となる。

定義 2. (d -変量時変 INAR 過程) $\Delta = 1/T$ とし, 各 $u \in [0, 1]$ に対して, $\mathbf{a}_0(u) = \Delta \boldsymbol{\eta}(u)$, $A(k; u) = \Delta H(\Delta k; u)$ とする。また, $\{\boldsymbol{\epsilon}_{t,T} = (\epsilon_{1,t,T}, \dots, \epsilon_{d,t,T})\}$ を各 $\epsilon_{i,t,T}$ が母数 $a_{0,i}(t/T)$ のポアソン分布にしたがう確率変数列とする。このとき, d -変量 (整数値) 確率変数列 $\{\mathbf{X}_{t,T}^{(p)}; t = 0, 1, \dots, T\}$ が次数 p の時変 INAR 過程にしたがうとは, $\mathbf{X}_{t,T}^{(p)}$ が次式で表すことができることを言う。

$$\mathbf{X}_{t,T}^{(p)} = \sum_{k=1}^p A\left(k; \frac{t}{T}\right) \odot \mathbf{X}_{t-k,T}^{(p)} + \boldsymbol{\epsilon}_{t,T}$$

ここで, “ $\odot$ ” は多変量 thinning operator である。

本報告では, 次の手順により, 時変 Hawkes graph を推定する。

Step1 上記で定義した d -変量時変 INAR 過程が, d -変量 AR 過程で表現できることを用いて, 局所最小二乗法により, 各 $u_0 \in [0, 1]$ に対する $\mathbf{a}_0(u_0)$, $A(k; u_0)$ の推定量 $\hat{\mathbf{a}}_0(u_0)$, $\hat{A}(k; u_0)$ を構成する。

Step2 Step1 の結果を用いて, Hawkes parameter $\boldsymbol{\eta}(u_0)$, $H(\Delta k; u_0)$ の推定量を $\hat{\boldsymbol{\eta}}(u_0) = \mathbf{a}_0(u_0)/\Delta$, $\hat{H}(\Delta k; u_0) = \hat{A}(k; u_0)/\Delta$ により構成する。

Step3 各 $u_0 \in [0, 1]$ に対する (時変) Hawkes graph $(G_{\mathbf{N}_T}(u_0))$ を

$$G_{\mathbf{N}_T}(u_0) = (V_{\mathbf{N}_T}(u_0), E_{\mathbf{N}_T}(u_0)) \quad \text{ここで, } V_{\mathbf{N}_T}(u_0) = \{(j; \eta_j(u_0))\}, \quad E_{\mathbf{N}_T}(u_0) = \{(i, j; \int h_{j,i}(s; u_0) ds)\}$$

と定義し, その推定量を

$$\hat{G}_{\mathbf{N}_T}(u_0) = (\hat{V}_{\mathbf{N}_T}(u_0), \hat{E}_{\mathbf{N}_T}(u_0)) \quad \text{ここで, } \hat{V}_{\mathbf{N}_T}(u_0) = \{(j; \hat{\eta}_j(u_0))\}, \\ \hat{E}_{\mathbf{N}_T}(u_0) = \{(i, j; \Delta \sum_{k=1}^p \hat{h}_{j,i}(\Delta k; u_0))\}$$

により構成する。

最後に 6 市場の株価指数データを用いた解析結果を紹介する。

参考文献

- Embrechts, P. and Kirchner, M.(2017) Hawkes graphs. *Theory and Probability and its Applications*, 62(1), 163-193.
- Roueff, R., Sachs, von R. and Sansonnet, L.(2016) Locally stationary Hawkes processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 126(6), 1710-1743.