時空間 GARCH モデル

東北大学　佐藤　宇樹
東北大学　松田　安昌

本発表では、新たな多変量ボラティリティモデルとして、空間計量経済学のツールを応用した時空間 GARCH モデルの提案を行う。次に、モデル内のパラメーターの推定法として擬似最尤法を用いた二段階推定法について説明を行う。その後、シミュレーションデータを用いて提案した推定量が望ましい統計的性質を示し、最後に時空間 GARCH モデルを日本市場の株式データに応用することでボラティリティに時空間相関が存在することを明らかにする。

1　多変量ボラティリティモデル

ボラティリティとはモデルの条件付き分散のことであり、ファイナンスにおいてはリスク管理やオプションの価格計算に用いられるため、重要な指標の 1 つと考えられている。しかし、ボラティリティには観測ができない、ボラティリティクラスタリングが存在するといった特有の特徴があるため、ボラティリティを推定、予測するためのボラティリティモデルが必要となる。ARCH モデルや GARCH モデルといった 1 変量ボラティリティモデルは幅広く応用され、その後、多変量ボラテリティモデルへと拡張されてきた。

多変量ボラティリティモデルは複数の金融商品間の変動の相互関係をモデル化できる一方で、次元の呪いと言われる問題を含んでいる。次元の呪いとは、多変量ボラティリティモデルでは条件付きの分散共分散行列の推定を行うため、推定すべきパラメーターの数が金融商品の数が増えるにつれて爆発的に増加してしまうという問題のことである。そこで、多変量ボラティリティモデルでは、分散共分散行列にシンプルな構造を仮定することで推定すべきパラメーターを減らすことでこの問題に対処している。本研究では、新たな多変量ボラティリティモデルとして、次元の呪いを解決するために、空間計量経済学のツールを応用した時空間 GARCH モデルの提案を行う。

2　研究内容

本研究では Sato and Matsuda (2017, 2018) で提案した空間ボラティリティモデルを時空間拡張した時空間 GARCH モデルの提案を行う。時空間 GARCH モデルは次のように定義される。

$$\begin{aligned} r_{i,t} &= \sigma_{i,t}\varepsilon_{i,t} \\ \log\sigma^2_{i,t} &= \lambda\sum_{j=1}^{n} w_{i,j}\log\sigma^2_{j,t} + \gamma\log r^2_{i,t-1} + \rho\sum_{j=1}^{n} w_{i,j}\log r^2_{j,t-1} + c_i + x_{i,t}\beta. \end{aligned}$$

ここで、$r_{i,t}$ は金融商品のリターン、$\sigma_{i,t}$ はボラティリティ、$x_{i,t}$ は説明変数、c_i は各金融商品特有の個別効果, $\varepsilon_{i,t}$ は時間方向には独立、クロスセクション方向には相関を持つ平均ゼロの確率変数、$w_{i,j}$ は空間重み行列の要素で金融商品間の相互関係を記述するものである。また、λ, γ, ρ はボラティリティ間の時空間相関を表すパラメーターである。

時空間 GARCH モデルは次のように誤差項に MA タイプの空間相関を持つ空間動学パネルモデルへと式変形することができる。

$$\log r^2_{i,t} = \lambda\sum_{j=1}^{n} w_{i,j}\log r^2_{j,t} + \gamma\log r^2_{i,t-1} + \rho\sum_{j=1}^{n} w_{i,j}\log r^2_{j,t-1} + c_i + x_{i,t}\beta + \log\varepsilon^2_{i,t} - \lambda\sum_{j=1}^{n} w_{i,j}\log\varepsilon^2_{j,t}.$$

時空間 GARCH モデル内のパラメーターは上の空間動学パネルモデルに基づいて、二段階推定法によって推定される。 1 段階目では個別効果以外のパラメーターの推定を行い、 2 段階目では個別効果の推定を行う。各段階で異なる擬似尤度に基づいた擬似最尤法によってパラメーターが推定される。その後、モンテカルロシミュレーションを用いて、提案した推定量は小さいバイアスや平均平方二乗誤差を持つなど望ましい小標本特性を持つことを示す。最後に、実証分析として日本市場の株式データに時空間 GARCH モデルを応用することで、日本市場の株式のボラティリティには時空間相関が存在することを明らかにする。

参考文献

[1] Sato, T and Matsuda, Y. (2017) Spatial Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Modles. J.Japan Statist. Soc., Vol47(No.2), pp221-236.
[2] Sato, T and Matsuda,Y. (2018) Spatial GARCH models, Data science and service research discussion paper, No. 78.