高次元データにおける正規分布の平均ベクトルの縮小推定

東京大・経済・修士 2 年　湯浅　良太
東京大・経済・教授　久保川　達也

1　初めに

n 個のデータがそれぞれ真の平均が異なる p 次元の正規分布に従っているとする．このとき, 平均の平均二乗誤差損失の下で同時推定を考える．このとき, それぞれのデータ自身は最尤推定量であるが, 他のデータを用いて縮小推定することによって推定精度を改善する事ができる．縮小推定の問題はこれまでに多くの研究がなされ, 特にこの問題は Efron and Morris によって考えられている．本発表では n, p がともに大きくなるような高次元データの場合について考える．

2　研究内容

$X = (X_1, \ldots, X_n), \Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n), X_i|\theta_i \sim N_p(0, A)$ とする．このとき, 平均二乗誤差損失の下で Θ を推定する．[1][2]」に倣い, $\theta_i \sim N_p(0, A)$ と仮定し, $\hat{\Theta} = (I - a(XX' + \alpha I) - bI)X$ という形の推定量を考える事で, リスクの最小化は,

$$RSL(A, \hat{\Theta}) = \frac{E[\mathrm{tr}\,[(a(XX' + \alpha I) - bI - (A+I)^{-1})XX'(a(XX' + \alpha I) - bI - (A+I)^{-1})]]}{n\mathrm{tr}\,[(A+I)^{-1}]}$$

を最小化する事と等しくなる．この分子の被積分関数を最小化する a, b に漸近的に収束するような $\hat{a}, \hat{b}$ を [3] 等のランダム行列理論によって求め, 推定量を導出した．導かれた推定量の漸近的性質や数値実験の結果を報告する．

参考文献

[1] Efron, B. and Morris, C. (1972). Empirical Bayes on vector observations: An extension of Stein's method. Biometrika. 59, 335-347.
[2] Efron, B. and Morris, C. (1976). Multivariate Empirical Bayes and Estimation of Covariance Matrices. The annals of statistics. 59, 335-347.
[3] Ledoit, O., and Peche, S. (2011). Eigenvalues of some large sample covariance matrix ensembles. Probab. Theory Relat. Fields. 151, 233-264