回帰項を含む同時空間自己回帰モデルにおける最尤推定

早稲田大学　力丸佑紀
（株）データサイエンスコンソーシアム　柴田里程

d 次元空間上の格子データに対し，以下のようなモデルを考える．

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}} \rho_{\boldsymbol{k}} X_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{k}} = \varepsilon_{\boldsymbol{v}}, \tag{1}$$

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{\boldsymbol{v}}) = f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}),\quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_{\boldsymbol{v}},\varepsilon_{\boldsymbol{v}'}) = 0\ (\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{v}')$$

(1) 式のモデルは，空間統計学で研究が進んだ同時空間自己回帰モデルや空間計量経済学でよく使われる空間ダービンモデルを含むモデルである．
実際，$f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})=0$ であるとき，(1) 式で表されるモデルは同時空間自己回帰モデルである．また，観測領域の端の部分は正しく表しきれないことを除けば，(1) 式は変換行列 P を用いて

$$P\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

のように書ける．ただし，$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\varepsilon}$ はそれぞれ観測値ベクトル，誤差ベクトルである．(2) 式において，$P = I - \rho W$ とし，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = X\boldsymbol{\beta} + WX\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{u}\sim \mathrm{N}(\boldsymbol{u},\sigma^2 I)$$

とすれば，空間ダービンモデルになる．空間ダービンモデルは，変換行列 P を空間重み行列 W と 1 つのパラメータ ρ で単純化して表し，回帰項 $X\boldsymbol{\beta}$ と X の空間ラグの項 $WX\boldsymbol{\gamma}$ を導入したモデルである．
本報告では，弱定常性の仮定のもとで (1) 式のモデルにおける最尤法によるパラメータ推定について検討した結果を述べる．Rikimaru and Shibata (2016) で提案されている 2 次元空間上の同時空間自己回帰モデルにおける近似尤度

$$L_A = \frac{1}{2}\log\det(A) - \frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^T\tilde{A}\boldsymbol{z},$$

$$A = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \rho_{\boldsymbol{k}}\rho_{\boldsymbol{k}'} W_{n_1}^{-k_1+k_1'} \otimes W_{n_2}^{-k_2+k_2'},$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \rho_{\boldsymbol{k}}\rho_{\boldsymbol{k}'} \alpha_{n_1}^{|k_1-k_1'|}\alpha_{n_2}^{|k_2-k_2'|} W_{n_1}^{-k_1+k_1'} \otimes W_{n_2}^{-k_2+k_2'}$$

を修正することによって，d 次元空間上の (1) 式のモデルの最尤法におけるパラメータ推定法の確立を目指す．d 次元空間への拡張では，特に漸近有効性を成立させるために，収縮率 α_{n_i} の修正が必要であり，収縮率を $1 + k_i/n_i + c/n_i^{\frac{d+1}{2}}$ とする．(1) 式に対応させるための拡張では，誤差項 $\varepsilon_{\boldsymbol{v}}$ の表現が変わるので，近似尤度 L_A の 2 次形式の項の評価が重要になる．修正した近似尤度による推定量の評価について理論的に証明した結果を報告する．

■参考文献　Yuuki Rikimaru and Ritei Shibata, (2016), A good approximation of the Gaussian likelihood of simultaneou autoregressive model which yields us an asymptotically efficient estimate of parameters, *Journal of Statistical Planning and Inference,* 173, 31-46.