一様共分散構造をもつ成長曲線モデルのモデル選択規準について

成蹊大・理工　榎本　理恵

取り扱う成長曲線モデルにおいては，説明変数に関し個体内変数と個体間変数がある．本報告では，一様共分散構造をもつ成長曲線モデルに対して k 個の個体内変数に関する選択問題を取り上げる．これまでに，大標本漸近枠組みや高次元漸近枠組みに対して，成長曲線モデルにおける次数選択について考察を行ってきた．最近では，Enomoto, Sakurai and Fujikoshi (2015) においてグループ数と次元数が大きい枠組みのもとで，さまざまな規準量の一致性について議論した．AIC 規準はすべての変数の組の規準値を求め，これらの中で最小なモデルを選ぶ規準量である．そのために，変数が増えると適用が困難になる問題点がある．そこで，小田・柳原（2017），櫻井・藤越（2017）等で用いられている AIC の差に基づく変数選択を適用し，その一致性について考察する．

いま取り扱う成長曲線モデルを次のように表す．個体間変数（群）の個数を q，観測した実験条件（時点）数を p とする成長曲線モデルでは，標本数 n として $n \times p$ の観測行列 $\mathbf{Y}$，$n \times q$ の個体間計画行列 $\mathbf{A}$，$k \times p$ の個体内計画行列 $\mathbf{X}$ が与えられている．このとき，個体内変数 $x_1, \ldots, x_k$ の添字を $\{1, \ldots, k\}$ とし，その部分集合を j とする．添字の集合が j である個体内変数を用いた成長曲線モデルを次のように表す．

$$\mathrm{M}_j : \mathbf{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}_j\mathbf{X}_j + \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} \sim \mathrm{N}_{n\times p}(\mathbf{O}_{n\times p}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}).$$

このとき，ここでは共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に次のような一様共分散構造を仮定する．

$$\boldsymbol{\Sigma}_u = \sigma^2\{(1-\rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'\} = \tau_1\left(\mathbf{I}_p - \frac{1}{p}G_p\right) + \tau_2\frac{1}{p}G_p.$$

ただし，$G_p = \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'/p,\ \tau_1 = \sigma^2(1-\rho),\ \tau_2 = \sigma^2\{1+(p-1)\rho\}$ である．また，一様共分散構造を仮定したときの AIC 規準は

$$\mathrm{AIC} = n(p-1)\log\hat{\tau}_1 + n\log\hat{\tau}_2 + np(\log 2\pi + 1) + 2(qk_j + 2)$$

である．ここに，$\hat{\tau}_i,\ i = 1, 2$ は τ_i の最尤推定量である．

変数選択の方法としては，フルモデルのもとでの規準量 AIC_k と，i $(i = 1, \ldots, k)$ 番目の変数を除いた規準量 $\mathrm{AIC}_{(-i)}$ を求め，$\mathrm{AIC}_{(-i)} - \mathrm{AIC}_k$ が，正ならば取り除いた変数が取り除くべきでなかったとしモデルに加え，負ならばモデルに加えないとする変数選択法を考える．本報告ではこの方法による変数選択法の一致性についての考察を行い，数値実験により得られた結果の妥当性を確認する．

参考文献

1. Enomoto, R., Sakurai, T. and Fujikoshi, Y. (2015). Consistency properties of AIC, BIC, Cp and their modifications in the growth curve model under a large-(q,n) framework. *SUT Journal of Mathematics*, **51 (1)**, 59–81.

2. 小田 凌也，柳原 宏和．多変量線形回帰モデルにおいて目的変数と説明変数が高次元の場合でも一致性を持つ高速な変数選択法．2017 年度統計関連学会連合大会，2017 年 9 月 4 日．

3. 櫻井 哲朗，藤越 康祝．共分散構造をもつ多変量回帰モデルにおける C_p 型の変数選択規準の高次元一致性．2017 年度統計関連学会連合大会，2017 年 9 月 4 日．