

高頻度金融市場におけるリード・ラグ関係の 多時間スケール解析

慶應義塾大学 大学院経営管理研究科 林 高樹
東京大学 数理・情報教育研究センター 小池祐太

本報告では金融高頻度データにおける複数の金融資産間の先行遅延関係(リード・ラグ関係)のモデル化・推定について議論する. 金融高頻度データのモデリング方法として広く利用されているアプローチとして, データを連続時間確率過程の離散観測データとしてモデル化する方法がある. リード・ラグ関係をこの枠組みで扱うために, [1] は 2 種類の金融資産の対数価格の観測データ $(Y_i^1)_{i=0}^{n_1}, (Y_j^2)_{j=0}^{n_2}$ を以下のようにモデル化する方法を提案した:

$$\begin{cases} Y_i^1 = X_{t_i^1}^1, & Y_j^2 = X_{t_j^2-\vartheta}^2 & \text{if } \vartheta \geq 0, \\ Y_i^1 = X_{t_i^1-|\vartheta|}^1, & Y_j^2 = X_{t_j^2}^2 & \text{if } \vartheta < 0. \end{cases}$$

ここに, $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ ($t \in [-\delta, T + \delta], \delta > 0$) は 2 次元連続セミマルチンゲール, $0 \leq t_1^\nu < t_2^\nu < \dots < t_{n_\nu}^\nu \leq T + \delta$ ($\nu = 1, 2$) は ν 番目の金融資産の観測時刻を表す停止時刻の増加列であり, $\vartheta \in (-\delta, \delta)$ は未知のリード・ラグパラメータを表す. ϑ は 2 資産の対数リターン間のクロス共分散関数を最大化する値と考えられるため, [1] は以下のクロス共分散関数の推定量を θ について最大化する方法を提案した:

$$U(\theta) = \begin{cases} \sum_{i,j:t_i^1 \leq T} \Delta_i Y^1 \Delta_j Y^2 1_{\{(t_{i-1}^1, t_i^1] \cap (t_{j-1}^2-\theta, t_j^2-\theta] \neq \emptyset\}}, & \text{if } \theta \geq 0, \\ \sum_{i,j:t_j^2 \leq T} \Delta_i Y^1 \Delta_j Y^2 1_{\{(t_{i-1}^1+\theta, t_i^1+\theta] \cap (t_{j-1}^2, t_j^2] \neq \emptyset\}}, & \text{if } \theta < 0, \end{cases}$$

ただし, $\Delta_i Y^\nu = Y_i^\nu - Y_{i-1}^\nu$ ($\nu = 1, 2$) である. [1] の方法はいくつかの実証研究でその有用性が示されているが, 他方でデータによっては推定結果の解釈が難しい場合があることも示されている. そのため, [?] は対数リターンではなくタイムスタンプに基づいてリード・ラグ関係を計測する方法を提案した. 具体的には,

$$I_t^\nu = \begin{cases} 1 & \text{時点 } t \text{ で } \nu \text{ 番目の資産が観測されたとき,} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

($\nu = 1, 2$) において, 以下の関数を θ に関して最大化する:

$$U^{DS}(\theta) = \frac{1}{\min\{n_1, n_2\}} \sum_{k=1}^{\lfloor T/\tau_N \rfloor} I_{k\tau_N}^1 I_{k\tau_N+\theta}^2.$$

ただし, τ_N は観測時刻の最小時間刻みを表す. この方法では解釈しやすい推定結果が得られるが, 他方で対数リターン間のリード・ラグ関係を直接推定しているわけではないという問題がある. 本報告では, 「ウェーブレット解析」の枠組みを利用することで, 時間スケールごとに異なるタイムラグをモデルに導入・推定することで, 対数リターン間のリード・ラグ関係のモデル化・推定を直接改善することを試みる.

参考文献

- [1] D. Dobrev and E. Schaumburg. High-frequency cross-market trading: Model free measurement and applications. Working paper, 2016.
- [2] M. Hoffmann, M. Rosenbaum, and N. Yoshida. Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data. *Bernoulli*, 19(2):426–461, 2013.