

INAR(p) 過程における変化点検出

慶應義塾大学理工学研究科 泉澤 佑
慶應義塾大学理工学部 白石 博

研究の概要

近年、日常生活のデジタル化により様々な計数時系列データが観測される。特に疫学等では観測された整数値の時系列は、患者の健康状態の変化変化などに起因して確率構造が変化することが指摘されている。このような変化を無視すると統計的推論に悪影響を及ぼすことが知られており、変化点の検出は注目を集めている。

ラグ p の INAR(Integer-Valued Autoregressive) 過程は各時刻で強度

$$\lambda_t = \eta + \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j}$$

のポアソン分布に従う整数値の時系列として定義される。ここで $\eta \in [0, 1)$, $a_j \geq 0$ であり, $\sum_{j=1}^p a_j < 1$ が満たされる場合に定常性をもつ。[1],[2] はそれぞれラグ 1 の INAR 過程に対して、変化点の検出手法を提案した。しかし現実の時系列データは 2 時点以上前の影響をうけ観測されることが多い。これに対し [3] は INAR(p) 過程がその構造を変化しないという仮定のもとで、パラメータの変化を検出する手法を提案している。本報告では [2] の提案した経験確率母関数を利用した手法をラグ p で利用可能なよう拡張する。これにより INAR(p) 過程に対するパラメータの変化だけでなく、構造変化に対するリアルタイム検出手法を提案し、シミュレーションにより有効性を検証する。

手法及び結果

整数値の列 $\{X_1, \dots, X_{T+t'}\}$ が観測されているとする。今、 $\{X_1, \dots, X_T\}$ が INAR(p) 過程からの実現値であることが既知とし、 $\{X_{T+1}, \dots, X_{T+t'}\}$ の中に変化点が存在するかどうかを検定する。変化点 ($T+t_0$ ただし, $0 < t_0 < t'$) は存在すればただ 1 つとすると、次のような検定問題として記述できる。

$$H_0: X_t \sim F_0 \text{ for } t = 1, \dots, T+t'.$$

$$H_1: X_t \sim F_0 \text{ for } t = 1, \dots, T+t_0 \text{ and } X_t \sim F_1 \text{ for } t = T+t_0+1, \dots, T+t'.$$

ここで, $F_0(x) := F(x; \lambda_t^{(0)})$ で $\lambda_t^{(0)}$ は $\{X_1, \dots, X_T\}$ が従う INAR(p) 過程の強度とし, $F_0 \neq F_1$ とする。このとき、検定統計量は次の様に定義する。

$$\hat{\Delta}_{T,t} := \int_0^1 \delta_{T,t}^2(u; \hat{\theta}_T) w(u) du.$$

ここで $\hat{\theta}_T = (\hat{\eta}_T, \hat{a}_{1T}, \dots, \hat{a}_{pT})$ は $\{X_1, \dots, X_T\}$ の従う INAR(p) 過程のパラメータ $\theta = (\eta, a_1, \dots, a_p)$ の推定量であり

$$\begin{aligned} \delta_{T,t}(u; \hat{\theta}_T) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=T+1}^{T+t} \left(u^{X_j} - \exp\left\{(\hat{\eta}_T + \sum_{i=1}^p \hat{a}_{iT} X_{j-i})(u-1)\right\} \right) \\ &\quad - \frac{t}{(T-p)\sqrt{T}} \sum_{j=2}^T \left(u^{X_j} - \exp\left\{(\hat{\eta}_T + \sum_{i=1}^p \hat{a}_{iT} X_{j-i})(u-1)\right\} \right). \end{aligned}$$

また $w(\cdot)$ は重み関数。この様に定義された検定統計量をもとに、データが観測されるたび (t' を $t'+1$ で置き換えて) 検定を実行し変化点を検出する。

シミュレーションによる有効性の検証結果については当日報告する。

参考文献

- [1] Kang, Jiwon, and Junmo Song. "Score test for parameter change in Poisson autoregressive models." *Economics Letters* 160 (2017): 33-37.
- [2] Hudecová, Šárka, Marie Hušková, and Simos G. Meintanis. "Tests for structural changes in time series of counts." *Scandinavian Journal of Statistics* 44.4 (2017): 843-865.
- [3] Doukhan, Paul, and William Kengne. "Inference and testing for structural change in general poisson autoregressive models." *Electronic Journal of Statistics* 9.1 (2015): 1267-1314.