量子ビット系における無情報事前分布と最適施設配置問題

大阪大学・基礎工　田中 冬彦

量子統計モデルにおける無情報事前分布を導出する原理は, 通常のベイズ統計に比べてはるかに難しい. 例えば, ジェフリーズ事前分布に相当するものは, 量子フィッシャー情報行列が無数に定義可能であり, どれが望ましいか不明瞭である. また, パラメータが離散の場合には対応できない. 発表者は, 最近, 量子統計モデル上である種のゲームを導入し, 最も不利な事前分布 (LFP) として無情報事前分布を定義することを提案した [2]. 例えば, 通常の reference prior [1] は平均符号長をできるだけ小さくするゲームにおける LFP と解釈できる. 本発表では, 量子コンピュータの基本素子である量子ビットの系に注目し, このゲームが 3 次元超球面上の施設配置問題とほぼ等価であることを示す. また, 応用として有限個の純粋状態からなるモデルで LFP をすべて導出するアルゴリズムを提案する.

1 量子ビット系は $\rho(\theta)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+z & x-\mathrm{i}y\\ x+\mathrm{i}y & 1-z\end{pmatrix}$, $\|\theta\|:=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq 1$, なるエルミート行列 (密度行列) で記述される. ここにパラメータ $\theta=(x,y,z)^\top\in\mathbf{R}^3$ は単位球面 S^2 とその内部を動く. また, 3 次元超球面の上半分 S^3_+ の元 $\tilde{\theta}=(\sqrt{1-\|\theta\|^2},\theta)$ と θ は 1:1 に対応する. さて, 密度行列は確率分布の量子版とみなせ, KL ダイバージェンスを拡張した量などが定義されるが, 問題もあるため Tanaka [2] に沿って Bures 距離 (inFidelity) $d_B(\rho,\rho')$ を導入する. 量子ビット系では $d_B(\rho(\theta),\rho(\eta))=\frac{1}{2}(1-\widetilde{\theta}\cdot\widetilde{\eta})=d_B(\widetilde{\theta},\widetilde{\eta})$ のようにかける. この時, 量子統計モデル $\mathcal{M}:=\{\rho(\theta):\ \theta\in\Theta\}$ について次のようなミニマックス型の定理が示せる [2].

$$\inf_{\tilde{\eta}\in S^3_+}\left\{\sup_{\theta\in\Theta} d_B(\widetilde{\theta},\widetilde{\eta})\right\}=\sup_{\pi\in\mathcal{P}(\Theta)}\inf_{\tilde{\eta}\in S^3_+}\int d_B(\widetilde{\theta},\widetilde{\eta})\pi(d\theta) \tag{1}$$

ここで, $\widetilde{\theta},\widetilde{\eta}$ がなす角度を $\alpha(\widetilde{\theta},\widetilde{\eta})$ と表すと $d_B(\widetilde{\theta},\widetilde{\eta})=\sin^2\frac{\alpha(\widetilde{\theta},\widetilde{\eta})}{2}$ となり $0\leq\alpha\leq\pi$. また, α は大円の弧長でもある. さて, S^2 上のミニマックス施設配置問題 [3] は古くから知られている. 供給施設から需要点への輸送コストを大円の弧長にとり, Θ を需要点の全体とすると次のような形にかける.

$$\inf_{\eta\in S^2}\left\{\sup_{\theta\in\Theta}\alpha(\theta,\eta)\right\} \tag{2}$$

需要点に対して最長の輸送コストがもっとも小さくなる施設 η を探すという問題である. 従って, 式 (1) の左辺の問題は S^3_+ 上のミニマックス施設配置問題とみなせる. 本研究では上の洞察に基いて, (2) と (1) 左辺のミニマックス解が一致することを示した. 特に量子ビット系で純粋状態 ($\|\theta\|=1$) に限定, 離散有限個 ($|\Theta|<\infty$) にすると Shiode [3] によるミニマックス解の探索アルゴリズムを用いて, 式 (1) の右辺の sup を達成する分布, つまり, LFP をすべて見つけることができる.

REFERENCES

[1] J. M. Bernardo: Reference posterior distributions for Bayesian inference. *J. R. Statist. Soc. B*, **41** (1979), 113–147.

[2] F. Tanaka: Noninformative prior in the quantum statistical model of pure states. *Phys. Rev. A*, **85** (2012), 062305.

[3] S. Shiode: Minimax facility location problem on a sphere. *Review of Kobe University of Mercantile Marine*, **37** (1989), 155–158.