

Calibrated Kolmogorov-Smirnov 検定の近似分布と不偏性

東京理科大学大学院 羽生田 文登
東京理科大学 村上 秀俊

一標本適合度検定は、得られた観測値と帰無仮説の分布 F_0 との同等性を確かめる統計的仮説検定である。 S_n を連続な累積分布関数 F から得られた確率標本 X_1, \dots, X_n の経験分布関数とし、 $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ を X_i の順序統計量とする。多くの分野で広く用いられている Kolmogorov-Smirnov(KS) 検定は、 $D_n = \sup_x |S_n(x) - F_0(x)|$ と定義される。しかし、分布の裾に対して検出力が低いことや非不偏であることが知られているため、多くの研究者によって様々な適合度検定の検定統計量が提案されてきた。Moscovich et al.(2016) は一様分布とベータ分布の関係に着目し、Calibrated KS(CKS) 検定を提案した。 $U_1, \dots, U_n \sim U[0, 1]$ とし、 $f_{u,v}$ はベータ分布 $B(u, v)$ の密度関数とする。 $F(x_{(i)}) = u_{(i)}$ を用いると、検定統計量 M_n は

$$M_n = \min_i \{M_n^+, M_n^-\} \text{ ただし } M_n^+ = \min_i p_{(i)}, M_n^- = \min_i (1 - p_{(i)}), p_{(i)} = \int_0^{u_{(i)}} f_{i, n-i+1}(x) dx$$

と定義される。統計的仮説検定において、検定統計量の分布の導出は不可欠であるが、CKS 検定の分布を閉じた式で与えることは困難である。そのため、Monte Carlo(MC) シミュレーションによって棄却値を算出する必要がある。その際、 n が大きくなるにつれて計算量が増え、実用性に欠ける。そこで本報告では、統計量 M_n を $aB(p, q) + b$ によって近似することで、正確かつ容易に棄却値を導出することを考える。表 1 は $n = 20$ のときの CKS 検定の分布に対するベータ近似を、正確な確率点と MC シミュレーションの結果と比較したものである。

表 1: 統計量 M_n に対するベータ近似の精度比較

n		1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%
20	Exact	.0004	.0011	.0023	.0052	.0405	.1264	.1546	.1806	.2084
	MC	.0004	.0011	.0023	.0052	.0406	.1258	.1546	.1796	.2077
	Beta	.0004	.0011	.0025	.0055	.0409	.1249	.1539	.1790	.2071

表 1 から、提案近似の精度が良いことが確認できる。また、仮説検定において、検定統計量が不偏検定となることは重要な問題であるが、多くの適合度検定は非不偏検定であることが知られている。本研究においては、理論観点および数値的観点から統計量 M_n の不偏性を調べる。さらに、Frey (2009) と同様の方法によって不偏 CKS 検定を構成し、不偏 CKS 検定と不偏 KS 検定の検出力を比較する。表 2 は不偏 CKS 検定と非不偏 CKS 検定の検出力である。

表 2: 検出力比較: $F_0(x) : U(0, 1)$ vs $F(x) : \text{Beta}(\eta, \eta)$, $\log \eta \in [-2, 2]$

n	$\log \eta$	0	0.05	1.0	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
20	Biased CKS	.0498	.0414	.0378	.0307	.0316	.0365	.0450	.1627	.4912	.8762
	Unbiased CKS	.0499	.0504	.0518	.0576	.0679	.0832	.1047	.3432	.7572	.9775

表 2 から、不偏 CKS 検定が非不偏性 (太字体) を補正していることがわかる。他の分布を仮定した場合の検出力の結果と考察については当日報告する。

参考文献

- [1] Frey, J., 2009, Unbiased goodness-of-fit, Journal of Statistical Planning and Inference, **139**, 3690-3697
- [2] Moscovich, A. and Nadler, B., 2016, On the exact Berk-Jones statistics and their p-value calculation, Electronic Journal of Statistic, **10** 2329-2354