ウィシャート行列と正規ベクトルの積について

北海道大学・経済学院　米永航志朗

北海道大学・公共政策大学院　鈴川晶夫

多変量正規分布とウィッシャート分布は多変量解析の様々な場面において現れる．例えば, 多変量正規分布を母集団分布として想定した場合に, 主成分分析や判別分析においてウィッシャート分布, あるいはその関数が現れることは周知である．また, $X_1, \cdots, X_n$ を多変量正規分布 $N_k(\mu, \Sigma)$ からの無作為標本としたときに, 母平均 μ の不偏推定量 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は $N_k(\mu, \Sigma/n)$ に従い, 母分散共分散行列の不偏推定量である $S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$ については, $(n-1)S$ はウィシャート分布 $W_k(n-1, \Sigma)$ に従う．以上のように, 多変量正規分布とウィッシャート分布は多変量解析において重要であるのだが, これまで統計学的な文脈において，ウィッシャート分布に従う確率行列と正規ベクトルの積に関する結果は Bodnar and Okhrin (2011), Bodnar, Mazur and Okhrin (2013), Kotsiuba and Mazur (2016) を除いて, あまり議論されてこなかった．. ウィッシャート行列の逆行列は逆ウィッシャート行列と呼ばれる．Bodnar and Okhrin (2011) は逆ウィッシャート行列と正規ベクトルの積について密度関数を導出し，ファイナンスにおけるポートフォリオ理論への応用や判別分析に対する応用について議論した．Bodnar, Mazur and Okhrin (2013) は, ウィッシャート行列と正規ベクトルの積の確率表現と密度関数を導出し，その密度関数の近似について論じた．また, Kotsiuba and Mazur (2016) は, 逆ウィッシャート行列と正規ベクトルの積の確率表現を導出し, その極限分布と密度関数の近似について議論した．

ところで，判別分析においては, 逆ウィッシャート行列と正規ベクトルとの積が重要である．また, ベイズ統計学の観点からみた場合に, 分散共分散行列の事後分布として逆ウィッシャート分布を得ることを考えれば, ウィッシャート行列と正規ベクトルの積も重要である．さらには, 1 次元の t 統計量はカイ二乗分布に従う確率変数の逆数の平方根と正規分布に従う確率変数の積になっており, さらに多変量の t 統計量においても, カイ二乗分布に従う確率変数の逆数の平方根と正規ベクトルとの積になっている．以上のことがウィッシャート行列と正規ベクトルの積について考察する動機となる．

本報告では, 異なる分散共分散行列をもつウィッシャート行列と正規ベクトルの積についての確率表現，精密分布そしてモーメントを議論し，シミュレーションによってそれらの正確さを裏付ける．また, ウィッシャート行列と正規ベクトルの分散共分散行列が共通である場合と, これらが異なる場合でどのような違いがあるかについて検討する．さらに, 異なる共分散行列を持つ逆ウィッシャート行列の平方根と正規ベクトルの積についても，確率表現と密度関数を導出し，シミュレーションに基づいてその性質について議論する．

参考文献

1. Bodnar, T. and Okhrin, Y. (2011). On the Product of Inverse Wishart and Normal Distributions with Applications to Discriminant Analysis and Portfolio Theory, *Scandinavian Journal of Statistics*, 38, 311-331.

2. Bodnar, T., Mazur, S. and Okhrin, Y. (2013). On the exact and approximate distributions of the product of a Wishart matrix with a normal vector, *J. Multivariate Anal.*, 122, 70-81.

3. Kotsiuba, I. and Mazur, S. (2015). On the asymptotic and approximate distributions ofthe product of an inverse Wishart matrix and a Gaussian random vector. *Theory ofProbability and Mathematical Statistics*, 93, 95-104.