複数のポアソン分布の平均値の経験ベイズ推定における対数変換を用いた工夫

三重大学　小椋 透
統計数理研究所　柳本 武美

1. 事後平均値の推定方法

K 個の独立したポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_1),\ldots,\mathrm{Po}(\lambda_K)$ から, サンプルが 1 つずつ得られたとする ($x_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1),\ldots,x_K \sim \mathrm{Po}(\lambda_K)$). このとき, $x_1,\ldots,x_K$ から複数のポアソン分布の平均値を経験ベイズ推定する. ポアソン分布の条件付確率関数及び事後密度は, パラメータ a, m, δ を用いて次のように表せる.

$$\text{条件付確率関数: } p(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,\ldots,$$
$$\text{事後密度: } \pi(\lambda|x;m,\delta) = \frac{(1+\delta)^{x+\delta m+a}}{\Gamma(x+\delta m+a)}\lambda^{x+\delta m+a-1}e^{-(1+\delta)\lambda}.$$

対数変換 $\theta = \log\lambda$ における事後平均値 $\hat{\theta}$ を算出し, それを逆変換して得られた値を事後平均値 $\hat{\lambda} = \exp(\hat{\theta})$ とする推定方法を提案する. 一方, λ の事後平均値 $\tilde{\lambda}$ を本研究の対照法とする. ディガンマ関数 $\psi(z)$ を用いてそれぞれ次のように表せる.

$$\hat{\theta} = \mathrm{E}[\log\lambda;\, \pi(\lambda|\,x;m,\delta)] = \psi(x+\delta m+a) - \log(1+\delta),$$
$$\hat{\lambda} = \frac{1}{1+\delta}\exp\{\psi(x+\delta m+a)\}, \tag{1}$$
$$\tilde{\lambda} = \mathrm{E}[\lambda;\, \pi(\lambda|\,x;m,\delta)] = \frac{x+\delta m+a}{1+\delta}. \tag{2}$$

2. m と δ の推定

次の $a=0$ に該当する対数周辺尤度 $\log_{\mathrm{ML}}(m,\delta)$ が最大となる推定量 $\bar{m}$, $\bar{\delta}$ を (1) 及び (2) 式に代入して λ の推定量 $\hat{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$ を求める. すなわち, $\bar{m}$, $\bar{\delta}$ の推定は $a=0$ で行うが, 提案法の (1) 式による $\hat{\lambda}$ の推定は $a=0.5$ で行う.

$$\begin{aligned}\log_{\mathrm{ML}}(m,\delta) &= \sum_k \{\log\Gamma(x_k+\delta m) - \log\Gamma(x_k+1) - \log\Gamma(\delta m)\} \\ &\quad + K\delta m\log\delta - (K\delta m + \textstyle\sum x_k)\log(1+\delta).\end{aligned} \tag{3}$$

3. 推定量の評価

推定量の精度は, 次のよく知られている 3 つのロスを用いて評価する. ($\check{\lambda} = \hat{\lambda}$ 又は $\tilde{\lambda}$)

$$L_e(\check{\lambda},\lambda) = \check{\lambda}\log\frac{\check{\lambda}}{\lambda} - \check{\lambda} + \lambda, \quad L_m(\check{\lambda},\lambda) = \lambda\log\frac{\lambda}{\check{\lambda}} - \lambda + \check{\lambda}, \quad L_{MS}(\check{\lambda},\lambda) = (\check{\lambda}-\lambda)^2.$$

数値例を用いて提案法の有効性を検証した.

参考文献

[1] Ghosh, M. and Yang, M.-C. (1988). *The Annals of Statistics*, **16**(1), 278-291.