

順序カテゴリ正方分割表における一般化周辺非同等性

東京理科大学大学院 藤澤 健吾

東京理科大学 田畑 耕治

行変数 X と列変数 Y が順序のある同じ分類からなる $r \times r$ 正方分割表において, (i, j) セル確率を π_{ij} ($i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, r$) とする. 周辺同等 (MH) モデルは次のように表される [1]:

$$\pi_{i+} = \pi_{+i} \quad (i = 1, \dots, r),$$

ただし, $\pi_{i+} = \sum_{t=1}^r \pi_{it}$, $\pi_{+i} = \sum_{s=1}^r \pi_{si}$ である. MH モデルは累積確率を用いて次のように表すこともできる:

$$F_i^X = F_i^Y \quad (i = 1, \dots, r-1),$$

ただし, $F_i^X = \sum_{s=1}^i \pi_{s+}$, $F_i^Y = \sum_{t=1}^i \pi_{+t}$ である. MH モデルがデータに当てはまらないとき, MH モデルの拡張モデルを当てはめることに関心がある. 任意の k ($k = 1, \dots, r-1$) に対して, k 次一般化周辺非同等 (GM_k) モデルを次のように提案する:

$$G^{-1}(F_i^X) = \sum_{l=0}^{k-1} i^l \Delta_l + G^{-1}(F_i^Y) \quad (i = 1, \dots, r-1),$$

ここで G は $G(-\infty) = 0$, $G(\infty) = 1$ を満たす狭義単調増加関数である. 特に $\Delta_0 = \Delta_1 = \dots = \Delta_{k-1} = 0$ のときは MH モデルである. また, $k = 1$, $G^{-1}(x) = \log(x/(1-x))$ のときは周辺累積ロジットモデルである [2]. さらに, $k = 1$, $G^{-1}(x) = \log(-\log(1-x))$ のときは周辺累積補対数対数モデルである [3].

任意の k ($k = 1, \dots, r-1$) に対して, 周辺 k 次積率一致 (ME_k) モデルを次のように考える:

$$\sum_{i=1}^r i^l \pi_{i+} = \sum_{i=1}^r i^l \pi_{+i} \quad (l = 1, \dots, k).$$

このとき次の定理を得る:

定理 1 与えられた k ($k = 1, \dots, r-1$) に対して, MH モデルが成立するための必要十分条件は GM_k モデルと ME_k モデルの両方が成立することである.

この定理は Saigusa *et al.* [3] や Miyamoto *et al.* [4] 等の結果を含む.

参考文献

- [1] Stuart, A. (1955). A test for homogeneity of the marginal distributions in a two-way classification. *Biometrika*, **42**, 412-416.
- [2] McCullagh, P. (1977). A logistic model for paired comparisons with ordered categorical data. *Biometrika*, **64**, 449-453.
- [3] Saigusa, Y., Maruyama, T., Tahata, K., and Tomizawa, S. (2018). Extended marginal homogeneity model based on complementary log-log transform for square tables. *International Journal of Statistics and Probability*, **7**, 27-31.
- [4] Miyamoto, N., Niibe, K., and Tomizawa, S. (2005). Decompositions of marginal homogeneity model using cumulative logistic models for square contingency tables with ordered categories. *Austrian Journal of Statistics*, **34**, 361-373.