

多変量正規 k 標本問題における総平均の方向へ縮小する ベイズミニマックス推定量

東京大・経済 今井 凌
東京大・経済 久保川 達也

k 個の p 次元正規標本からそれぞれ観測ベクトルが得られているモデルを考える. 共分散行列は既知の正定値行列に標本間で共通の未知スカラーパラメータがかけ合わさった設定とし, スカラーパラメータの推定量も観測ベクトルとは独立に得られているとする.

$$\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_i, \sigma^2 \mathbf{V}_i), \quad \text{for } i = 1, \dots, k,$$
$$S/\sigma^2 \sim \chi_n^2.$$

このモデルにおいて, 次の 2 次損失に基づく $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_k$ の同時推定問題を考える. $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_k$ を既知の $p \times p$ 正定値対称行列として

$$L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^k (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \mathbf{Q}_i (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\mu}_i) / \sigma^2,$$

ここで $\boldsymbol{\delta}_i$ は $\boldsymbol{\mu}_i$ の推定量, $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_k, \sigma^2)$ である. 例えば誤差項に正規分布を仮定した k 本の線形回帰式における回帰係数ベクトルの推定を予測 2 乗損失で考えるとこのモデルに帰着される.

上記の設定において, k 個の観測ベクトル $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$ をこれらの総平均

$$\hat{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{A} \sum_{i=1}^k \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{X}_i \quad \text{where} \quad \mathbf{A} = \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{V}_i^{-1} \right)^{-1}$$

の方向へ縮小する推定量をベイズ的に導出し, それらを含む新しいミニマックス推定量のクラスを構成する. 特に $\mathbf{Q}_i = \mathbf{V}_i^{-1}$ の場合にベイズ (故に許容的) かつミニマックスな推定量を導出する. 先行研究 [2], [3] は 2 標本問題までの考察に留まっている. 1 つの標本のみの損失を考えた場合や [1] で提案されている行列型の縮小推定量についても議論する予定である.

参考文献

- [1] Efron, B. and Morris, N. (1972). Empirical Bayes on vector observations: an extension of Stein's method. *Biometrika*, **59**: 335–347.
- [2] Ghosh, M., Sinha, B. K. (1988). Empirical and Hierarchical Bayes Competitors of Preliminary Test Estimators in Two Sample Problems. *J. Multivariate Anal.*, **27**: 206–227.
- [3] Perron, F. (1993). Estimation of a mean vector in a two-sample problem. *J. Multivariate Anal.*, **46**: 254–261.