間引きデータに基づくエルゴード的拡散過程のハイブリッド型推定法

大阪大学基礎工学研究科 貝野友祐
大阪大学基礎工学研究科 内田雅之

1 モデルと推定量

以下に定義される d 次元拡散過程モデルのパラメータ推定問題を考える.

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t,\beta)dt + a(X_t,\alpha)dw_t, & t \geq 0, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

w_t は r 次元 Wiener 過程である. x_0 は確定的初期条件とする. $a : \mathbf{R}^d \times \Theta_\alpha \to \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r$, $b : \mathbf{R}^d \times \Theta_\beta \to \mathbf{R}^d$ とし, $\alpha \in \Theta_\alpha \subset \mathbf{R}^{m_1}$, $\beta \in \Theta_\beta \subset \mathbf{R}^{m_2}$ とする. Θ_α, Θ_β はコンパクトな凸集合とし, $\theta = (\alpha,\beta) \in \Theta$, 真値 $\theta^* = (\alpha^*,\beta^*) \in Int(\Theta)$ とする. 観測データを $\mathbb{X}_n = (X_{t_i^n})_{0\leq i\leq n}$ とし, $t_i^n = ih_n$, $nh_n = T$ とする. p を 2 以上の整数とする. ある $\epsilon_1 > 0$ と $\gamma \in \left(\frac{1}{p}, \frac{1+\epsilon_1}{2+\epsilon_1}\right)$ が存在し, $h_n = O\left(n^{-\gamma}\right)$ とする. $G \in (\gamma, 1]$ とし, $n_1 = [n^G]$ とする. $\mathbb{Y}_{n_1} = (X_{t_i^n})_{0\leq i\leq n_1}$ を縮約データとし, $t_i^n = ih_n$ とする. $J \in ((1-\gamma)(1+\epsilon_1), 1]$ とし $n_2 = [n^J]$ とする. $K \in [0, 1-J]$ とし $n_3 = [n^K]$ とする. $\mathbb{Z}_{n_2} = (X_{s_i^n})_{0\leq i\leq n_2}$ を間引きデータとし, $s_i^n = i\Delta_n$, $\Delta_n = n_3h_n$ とする. $n \to \infty$ のとき, $h_n \to 0$, $nh_n = T \to \infty$, $nh_n^p \to 0$, $n_1h_n \to \infty$, $n_1h_n^p \to 0$, $\Delta_n \to 0$, $n_2\Delta_n \to \infty$ を満たしているものとする. 縮約データ $\mathbb{Y}_{n_1}$ および間引きデータ $\mathbb{Z}_{n_2}$ に基づく, 次のような疑似対数尤度関数を考える.

$$\begin{aligned} W_{n_1}^{(1)}(\alpha) &= -\frac{1}{2h_n^2}\sum_{i=1}^{n_1}\left\|\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)^{\otimes 2} - h_nA(X_{t_{i-1}^n},\alpha)\right\|^2, \\ W_{n_2}^{(2)}(\beta) &= -\frac{1}{2\Delta_n}\sum_{j=1}^{n_2}\left|X_{s_j^n} - X_{s_{j-1}^n} - \Delta_n b(X_{s_{j-1}^n},\beta)\right|^2. \end{aligned}$$

ここで, $\star$ は転置を表し, $A(x,\alpha) = aa^\star(x,\alpha)$ とする. ベクトル B に対して, $B^{\otimes 2} = BB^\star$ とする. 行列 C に対して, $||C|| = tr(CC^\star)^{1/2}$ とする. $W_{n_1}^{(1)}(\alpha)$,$W_{n_2}^{(2)}(\beta)$ を用いてベイズ型推定量 $(\tilde{\alpha}_{n_1}^{(1)}, \tilde{\beta}_{n_2}^{(2)})$ を求める. $(\tilde{\alpha}_{n_1}^{(1)}, \tilde{\beta}_{n_2}^{(2)})$ を初期値として, フルデータ $\mathbb{X}_n$ に基づく疑似対数尤度関数を最適化し, 適応的最尤型推定量 (以下, ハイブリッド型推定量と呼ぶ) を求める. そして, ベイズ型推定量とハイブリッド型推定量の正則条件の下での漸近的性質を示す.

2 数値シミュレーション

適応的最尤型推定量を求めるためには適切な初期値が必要である. 適切な初期値を探す方法として, ベイズ法, 一様乱数 +optim 法, 格子点法を比較し, ベイズ法が最も優れていることを示す. 具体的には, ベイズ法により初期推定量を求め, その所要時間を計測する. そして, これと同程度もしくは, これより多くの時間をかけて一様乱数+optim 法と格子点法により初期推定量を求める. 3 つの初期推定量を用いて適応的最尤型推定量を計算し, ベイズ型推定量に基づく適応的最尤型推定量 (ハイブリッド型推定量) が最もバイアスと分散が小さくなることを示す.