

非正規確率微分方程式モデルの係数誤特定下における推定理論

上原 悠植

統計数理研究所 リスク解析戦略研究センター

確率基 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ 上に定義された次の一次元非正規確率微分方程式 (LSDE) を考える:

$$dX_t = A(X_t)dt + C(X_{t-})dZ_t. \quad (0.1)$$

ここで、各構成要素は以下を満たすと仮定する.

- X_0 は $\mathcal{F}_0$ -可測な初期変数.
- Z は初期変数 X_0 と独立な Brownian 要素を持たない標準化された Lévy 過程であり、任意次のモーメントを持つ.
- 係数 $A: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $C: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続関数.

(0.1) の解過程 X から高頻度離散データ $(X_{t_0^n}, \dots, X_{t_n^n})$ を観測したという状況下で、以下の LSDE モデルを想定する:

$$dX_t = a(X_t, \alpha)dt + c(X_{t-}, \gamma)dZ_t. \quad (0.2)$$

ここで、観測時間列 $\{t_j^n\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$ は $nh_n \rightarrow \infty$, $nh_n^2 \rightarrow 0$ を満たす正数列 h_n を用いて $t_j^n = jh_n$ と書けるとし、係数 $a: \mathbb{R} \times \Theta_\alpha \mapsto \mathbb{R}$ と $c: \mathbb{R} \times \Theta_\gamma \mapsto \mathbb{R}$ の関数形は推定対象である未知パラメータ $\theta := (\alpha, \gamma) \in \Theta := \Theta_\alpha \times \Theta_\gamma \subset \mathbb{R}^p$ を除いて既知であるとする. 本研究では特に、真の係数 $(A(\cdot), C(\cdot))$ が想定する関数族 $\{(a(\cdot, \alpha), c(\cdot, \gamma)) : \theta \in \Theta\}$ に属さない、いわゆるモデルの誤特定状況を想定する.

モデル特定下においては、正規型疑似尤度を用いることで、 θ の推定が可能であることが知られている [2]. 本研究では、モデル誤特定下における正規型疑似最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ の漸近挙動を与える (定理 1, 定理 2) とともに、その導出過程において重要な役割を果たす [1] により導入された Extended Poisson equation についても概説する.

定理 1 (裾確率評価). 任意の $L > 0$ と $r > 0$ について、ある正定数 C_L が存在し、

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P(|\sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_n - \theta^*)| > r) \leq \frac{C_L}{r^L}.$$

定理 2 (漸近正規性). ある正定値行列 Σ と正則行列 Γ について、

$$\sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_n - \theta^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Gamma^{-1}\Sigma(\Gamma^{-1})^\top).$$

References

- [1] Kulik, A. and Veretennikov, A. (2012). Extended Poisson equation for weakly ergodic Markov processes. Theory of Probability and Mathematical Statistics, 85, 23-39.
- [2] Masuda, H. (2013). Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Lévy driven SDE observed at high frequency., Ann. Statist., 41, 1593-1641.