

# 個別株による Rational GARCH モデルの実証分析

広島経済大学 高石 哲弥

## 1. はじめに

金融資産収益率時系列のボラティリティモデルとしてよく利用されるモデルの1つはGARCHモデルである。このモデルは、収益率のファットテイル性やボラティリティクラスタリングの性質を再現することができる。一番シンプルなGARCH(1, 1)モデルでは、ボラティリティ過程が1期前のボラティリティと1期前の収益率の2乗項から成り立つ。このモデルはボラティリティクラスタリングの性質を再現できる一方、正負の収益率に対するボラティリティの非対称性を捉えることができない。株価収益率は前日の収益率が正よりも負の場合に当日のボラティリティが大きくなるというLeverage効果が見られるが、GARCH(1, 1)モデルではこの効果を捉えることができない。そこで、ボラティリティの非対称性を捉えられるようにGARCH(1, 1)モデルを改善したモデルが提案されている。その中で、Asymmetric GARCH (AGARCH) モデルは、GARCH(1, 1)モデルに収益率の1乗項を付け加えて非対称性が捉えられるようになっている。ここで、GARCH(1, 1)モデルとAGARCHモデルの構築方法に注目すると、ボラティリティと収益率の多項式で構築されていることがわかる。これは、別の見方をすると我々の知らない真のボラティリティ過程をテイラー展開によって近似していると見ることができる。AGARCHモデルはボラティリティ非対称性を捉えられる最低次のテイラー展開になっている。更に近似の精度を上げるためには展開の次数を上げることも考えられる。しかしながら、テイラー展開はある点での展開であるため、その点から離れた所では、展開の次数を上げることによって劇的に精度が上がるとは限らない。そこで、本研究ではパデ近似で知られる分数関数を利用してボラティリティ過程を構築する方法をとる[1]。パデ近似ではある区間内を精度よく近似できるので、テイラー展開による方法よりもボラティリティを精度良く求められる可能性がある。非対称性を捉えられる分数関数を用いたボラティリティ過程として、本研究では以下のRational GARCH (RGARCH) モデルを定義する[2]。

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega + \alpha\sigma_{t-1}^2 + \beta r_{t-1}^2}{1 + \gamma r_{t-1}} \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega + \alpha\sigma_{t-1}^2 + \beta r_{t-1}^2}{\exp(\gamma r_{t-1})} \quad (2)$$

(1)式の $\gamma$ が非対称性を取り入れるパラメータである。 $\gamma$ がゼロの時、(1)式はGARCH(1, 1)モデルの過程と一致する。ところで、(1)式は分母が小さい時は不安定となる。そこで、不安定性を取り除いた(2)式も定義する。(2)式は $\gamma$ がゼロの極限で(1)式に一致する。尚、分数関数をGARCHモデルの誤差関数に応用したモデル[3, 4]も存在する。

## 2. 結果

本研究では、東京証券取引所で取引された6つの個別株 (JT、キャノン、東レ、パナソニック、住友金属工業、新日鉄) を対象に2006年6月3日から2009年12月30日までの高頻度データを利用した。パラメータ推定には、ベイズ推定を用い、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて実行した。ボラティリティ推定の精度は、真のボラティリティが不明なので実現ボラティリティを代用し、実現ボラティリティとどの程度一致するかという方法で比較を行った。比較対象には非対称モデルであるEGARCHとGJRモデルを利用した。その結果、RGARCHモデルは他の非対称モデルと同等のパフォーマンスを示すことが分かった。また、(1)と(2)で定義されるモデルでは、(2)の方が良い結果を示した。

## 参考文献

- [1] T. Takaishi Rational GARCH model: An empirical test for stock returns. *Physica A* 473(2017)451-460.
- [2] T. Takaishi, Volatility estimation using a rational GARCH model, *Quantitative Finance and Economics*, 2(1) (2018) 127-136. DOI:10.3934/QFE.2018.1.127
- [3] T. Takaishi T, T. T. Chen (2012) Bayesian Inference of the GARCH model with Rational Errors. *Int. Proc. Econ. Dev. Res.* 29(2012) 303-307. <http://www.ipedr.com/vol29/55-CEBMM2012-R00014.pdf>
- [4] T. T. Chen, T. Takaishi Empirical study of the GARCH model with rational errors. *Journal of Physics: conference series* 454 (2013)012040. DOI:10.1088/1742-6596/454/1/012040