作用積分による法則収束の評価

東京国際大学経済　竹内 宏行

1. はじめに

最急降下法は関数が最も激しく変化する場所，すなわち鞍点と呼ばれる一点に積分を局在化させ，近似によりこれを求める方法である．鞍点はパラメータに従って動くとき，対応する確率分布に関する殆ど全ての情報を持つと同時に，解析的・統計的に興味深い性質を示す (竹内 (2013)(2015))．

本報告では鞍点を利用するというアイデアにより確率分布のエネルギーを定義，変分法の適用でこれを経路として扱える論拠を示し，作用積分からその法則収束を評価する．この定義により "法則収束の極限分布はエネルギーが最も低く安定した状態である" という概念の形成が明確に成される．同時に，力学等において停留点やその停留値にのみ着目されていた作用積分は，法則収束を評価するためのスカラー量として多くの有益な情報を含んでいる事実を示す．

統計量や分布関数列の収束に関する評価基準として，様々な距離や誤差が統計学・確率論には在る．ここでは "最小作用の原理" という自然界の基本的な指導原理を新たな基準とする可能性を示す．

2. 経路としての確率分布

従来，鞍点は鞍点方程式の解として pointwise に定義・利用されてきた．しかしながら確率分布に対する作用積分の定義，および変分法の適用により path(経路) として意味を持たせることが可能になる．さらに第 1 ・第 2 変分の計算結果より，鞍点はこの変分問題における唯一の最適解であることが明らかにされる．一方，竹内 (2013) は鞍点が期待値の近傍の振る舞いにより確率分布と一意に対応することを証明した．従って本研究の結果，確率分布を経路すなわち無限次元空間の元として扱うことが出来る．

3. 作用積分と法則収束

法則収束は分布関数列の弱収束あるいは連続定理による特性関数列の各点収束により示され，収束の評価としてはエッジワース展開やグラム-シャリエ展開等がある．これらは正規分布からの乖離具合を理論の中心とするものであるが，作用積分による評価には極限分布の種類を問わないという顕著な性質がある．例えばポアソンの少数の法則はポアソン分布 $Po(\lambda)$ に関する 2 項分布 $B(n,p)$ の作用を $A_{Po}[\alpha_B]$，ポアソン分布自身の作用を $A_{Po}[\alpha_{Po}]$ として次のように評価することができる．

$$A_{Po}[\alpha_B] = A_{Po}[\alpha_{Po}] + \frac{1}{2}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} t\left(\frac{t-\lambda}{t-n}\right)^2 dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

ただし右辺第 2 項以下は正値である．

参考文献

[1] 竹内 宏行 (2015). 確率分布の sp-変換, 日本統計学会誌 第 45 巻.
[2] 竹内 宏行 (2013). 鞍点と確率分布の対応について, 日本統計学会誌 第 42 巻.