

データ駆動型時間スケールを用いた Schwarz 型モデル評価

大阪大学 江口 翔一

九州大学 増田 弘毅

確率過程から離散観測されたような時系列データ

$$(t_1, X_{t_1}), (t_2, X_{t_2}), \dots, (t_n, X_{t_n})$$

を用い、確率微分方程式におけるモデル選択を考える。候補モデルとして確率微分方程式を扱うモデル選択に対して、エルゴード的拡散過程における AIC 型情報量規準 (CIC) や LAQ モデルにおける Schwarz 型情報量規準 (quasi-BIC, BIC) の導出など様々な理論的研究が行われている。しかし、これらの情報量規準は、モデルの構築・推定に不可欠な要素であるモデル時間スケールが既知の状況でその理論的正当性が与えられていることが多い。そこで、モデル時間スケールが未知の設定、つまり、適当な条件のもとでモデル時間スケールを任意に定めることができるモデル設定で情報量規準の拡張を行うことは理論上重要である。本発表では、モデル時間スケールが未知のエルゴード的拡散過程を対象とした Schwarz 型モデル評価について言及する。

モデル評価の対象として、次の d 次元エルゴード的拡散過程モデルを考える。

$$dX_t = \sqrt{\tau}a(X_t, \alpha)dw_t + \tau b(X_t, \beta)dt, \quad t \in [0, T_n].$$

a は $\mathbb{R}^d \times \Theta_\alpha$ 上の $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ -値関数、 b は $\mathbb{R}^d \times \Theta_\beta$ 上の $\mathbb{R}^d$ -値関数、 $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta_\alpha \times \Theta_\beta \subset \mathbb{R}^{p_\alpha} \times \mathbb{R}^{p_\beta}$ 、 w は r -次元標準 Wiener 過程である。また、時間スケール $h_0 = h_{0,n}$ は $nh_0 \rightarrow \infty$, $nh_0^2 \rightarrow 0$ を満たすものとする。このとき、局所正規近似に基づき、疑似対数尤度

$$\mathbb{H}_n(\theta; h) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \log(2\pi h)^d |a(X_{t_{j-1}}, \alpha)^{\otimes 2}| + \frac{1}{h} \{a(X_{t_{j-1}}, \alpha)^{\otimes 2}\}^{-1} [(\Delta_j X - hb(X_{t_{j-1}}, \beta))^{\otimes 2}] \right\}$$

を得る。ただし、 $h = \tau h_0$ である。ここで、 h が既知の場合、この疑似対数尤度を用いて推定量 $\hat{\theta}_n$ が

$$\hat{\theta}_n \in \operatorname{argmax}_{\theta} \mathbb{H}_n(\theta; h)$$

で与えられ、エルゴード的拡散過程における情報量規準 CIC や (Q)BIC が導出される。一方、時系列データを扱う場合、 τ は未知であると考えられる。また、データとともに与えられるタイムスタンプ t_j の多くは “2018/6/27 21:20:40” のような形で表され、この情報から h_0 を直接定めることはできない。そこで、[1, Section 2] では、 $h(=\tau h_0)$ を一つのモデルパラメータとし、 θ と h を同時に推定する方法の提案及び推定量の漸近的性質の導出を行っている。本研究では、[1, Section 2] で提案された推定量を利用し、モデル時間スケールが未知のエルゴード的拡散過程における Schwarz 型モデル評価基準を導出する。これは、既存の情報量規準 (Q)BIC を修正した形で得ることができる。

参考文献

- [1] Eguchi, S. and Masuda, H. (2018). Data driven time scale in Gaussian quasi-likelihood inference. arXiv:1801.10378v2.