平均値シフトの性質

京都大学大学院情報学研究科　　山崎 遼也
京都大学大学院情報学研究科　　田中 利幸

平均値シフト (MS) アルゴリズムは，カーネル密度推定量 (KDE)

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \quad \left(\text{ただし，} \quad w_i > 0 : \text{重み，} \quad K(\boldsymbol{x}) : \text{カーネル関数} \right)$$

のモード (極大値) を，適応的に決定されるステップサイズを用いた勾配上昇法

$$\boldsymbol{y}_{t+1} = \boldsymbol{y}_t + \eta_t \nabla \hat{p}(\boldsymbol{y}_t) = \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}_t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i w_i G(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{x}_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i G(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{x}_i)}$$

$$\left(\text{ただし，} \quad \eta_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i G(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{x}_i)} > 0, \quad \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i w_i G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)} - \boldsymbol{x} : \text{MS 関数，} \quad \nabla K(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \right)$$

により求めることで，確率密度関数 $p(\boldsymbol{x})$ のモードを推定する．

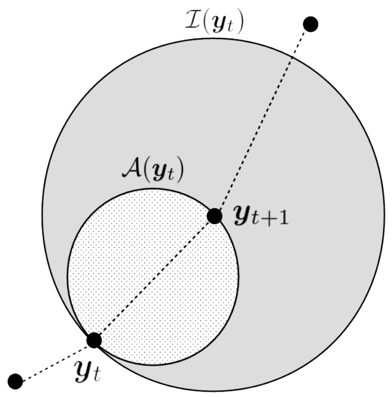
既存研究 [1–5] では，モード推定系列 $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0,1,\ldots}$ と密度推定系列 $\{\hat{p}(\boldsymbol{y}_t)\}_{t=0,1,\ldots}$ の収束性について研究されてきた．しかし，これらの研究では，モード推定系列が (収束するならば) どのように収束するかということや，密度推定系列がどのように増加するかということなどの，より詳細な挙動は明らかになっていない．これは，$\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0,1,\ldots}$ のみに注目した議論がなされているためであると考えられる．

本研究では，MS 関数の性質を詳細に調べ，$\boldsymbol{y}_t$ の近傍における KDE $\hat{p}(\boldsymbol{x})$ の挙動について次の結果を得た．

定義 (向上球，上昇球)**.** MS 関数 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$ と点 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}$ における向上球 $\mathcal{I}(\boldsymbol{x})$ を中心が $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})/2$ で半径が $\|\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})\|/2$ の球体と定義し，$\boldsymbol{x}$ における上昇球 $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ を中心が $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$ で半径が $\|\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})\|$ の球体と定義する．

定理 1. K がある条件を満たすとき，ある点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y} \in \mathcal{I}(\boldsymbol{x})$ に対して，$\hat{p}(\boldsymbol{y}) \geq \hat{p}(\boldsymbol{x})$ となる．さらに，$\boldsymbol{y}$ が $\mathcal{I}(\boldsymbol{x})$ の内部にあるとき，$\hat{p}(\boldsymbol{y}) > \hat{p}(\boldsymbol{x})$ となる．

定理 2. K がガウスカーネルであるとき，ある点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ に対して，$\nabla \hat{p}(\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \geq 0$ となる．さらに，$\boldsymbol{y}$ が $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ の内部にあるとき，$\nabla \hat{p}(\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) > 0$ となる．これより，$\nabla \hat{p}(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{0}$ も従う．



図：$\boldsymbol{y}_t$ の向上球 $\mathcal{I}(\boldsymbol{y}_t)$, 上昇球 $\mathcal{A}(\boldsymbol{y}_t)$

さらに，これらの結果に基づいて，いくつかのより具体的な MS アルゴリズムの性質を解き明かした．本発表では，本研究で得られた MS アルゴリズムの性質を紹介するとともに，その応用方法について議論する．

参考文献

[1] D. Comaniciu and P. Meer, “Mean shift: A robust approach toward feature space analysis,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, pp. 603–619, May 2002.

[2] M. A. Carreira-Perpiñán, “Gaussian mean-shift is an EM algorithm,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 29, pp. 767–776, May 2007.

[3] Y. Aliyari Ghassabeh, “On the convergence of the mean shift algorithm in the one-dimensional case,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 34, pp. 1423–1427, Sept. 2013.

[4] Y. Aliyari Ghassabeh, T. Linder, and G. Takahara, “On some convergence properties of the subspace constrained mean shift,” *Pattern Recognition*, vol. 46, pp. 3140–3147, Nov. 2013.

[5] Y. Aliyari Ghassabeh, “A sufficient condition for the convergence of the mean shift algorithm with Gaussian kernel,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 135, pp. 1–10, Mar. 2015.