潜在確率過程の相関推定量について

東京大学大学院数理科学研究科　木村晃敏

$\mathbb{X}_t = (X^1, X^2)$ を フィルター付き確率空間 $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ $(\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ 上の

$$\mathbb{X}_t = \mathbb{X}_0 + \int_0^t \mathbb{X}_s^0 \ ds + \int_0^t \mathbb{X}_s^1 \ dw_s \quad (t \in [0,T])$$

（ただし, w : r 次元 $\mathcal{F}$-Wiener 過程, $\mathbb{X}_0$: $\mathbb{F}_0$-可測確率変数, $\mathbb{X}^0$: 2-次元 $\mathbb{F}$-適合過程, $\mathbb{X}^1$: ある仮定を満たす $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^r$-値 $\mathbb{F}$-適合過程）なる伊藤過程, a_n を $a_n \to \infty$ (as $n \to \infty$) なる正のパラメータとし, $\mathcal{B}$ 上の, 2 次元確率過程 $\mathbb{Y}^n = (Y^{n,1}, Y^{n,2})$ は,

$$\mathbb{Y}_t^n = \mathbb{Y}_0^n + \int_0^t a_n \mathbb{X}_s \ ds + \mathbb{M}_t^n \quad (t \in [0,T]),$$

の分解を持つものとする.（ただし, a_n は, n に依存する正の数で, $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ とし, $\mathbb{M}^n$ は 2 次元確率過程で, $\mathbb{M}_0^n = 0$ とする.）強度過程 $a_n\mathbb{X}$ をもつ計数過程 $\mathbb{Y} = (Y^1, Y^2)$ は, この例になっている.

時刻 $(t_j)_{j=0,\dots,b_n}$ における $\mathbb{Y}$ の観測データから, $\mathbb{X}$ の間の相関を推定する.

まず,（共）分散推定量 $S_n^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ を

$$S_n^{\alpha\beta} = \sum_{j=2}^{b_n} \left(\frac{\Delta_j \mathbb{Y}^n}{a_n h_j} - \frac{\Delta_{j-1}\mathbb{Y}^n}{a_n h_{j-1}}\right)^{\otimes(\alpha,\beta)}$$

のように定義する. ただし, 確率過程 V に対して $\Delta_j V = V_{t_j} - V_{t_{j-1}}$, $h_j = t_j - t_{j-1}$ であり, $A^{\otimes(i,j)}$ は $A^{\otimes}$ の (i,j) 成分, $A^{\otimes} = A \otimes A = AA^{\star}$, $\star$ は転置を表す. ある仮定のもとで, $S_n = (S_n^{12}, S_n^{11}, S_n^{22})$ の漸近混合正規性

$$\left(\frac{T}{b_n}\right)^{-1/2}(S_n - U) \to^{d_s} \Gamma^{1/2}\zeta$$

が成り立つ. ただし, $U = (U^{12}, U^{11}, U^{22})^{\star}$,

$$U^{\alpha\beta} = \frac{2}{3}\langle X^\alpha, X^\beta\rangle_1 \ = \ \frac{2}{3}\int_0^1 X_t^{\alpha 1} \cdot X_t^{\beta 1} dt \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

ζ を $\mathcal{F}$ と独立な 3 次元標準正規確率変数,

$$\Gamma = (\gamma^{pq})_{p,q=(1,2),(1,1),(2,2)}, \qquad \gamma^{pq} = \int_0^1 (\mathbb{X}_s^1)^{\tilde{\otimes} p} \cdot (\mathbb{X}_s^1)^{\tilde{\otimes} q} \ ds$$

とする. ここで, $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^{\mathsf{r}}$ に対して $x \tilde{\otimes} y = ((x_i y_j + x_j y_i)/2) \in \mathbb{R}^{\mathsf{r}} \otimes \mathbb{R}^{\mathsf{r}}$, $x = (x_i^\alpha) \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{\mathsf{r}}$ に対して $x^{\tilde{\otimes}(\alpha,\beta)} = x_\cdot^\alpha \tilde{\otimes} x_\cdot^\beta$, $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^{\mathsf{r}}$ に対して $x \cdot y = \sum_{i=1}^{\mathsf{r}} x_i y_i$, $x = (x_{i,j}), y = (y_{i,j}) \in \mathbb{R}^{\mathsf{r}} \otimes \mathbb{R}^{\mathsf{r}}$ に対して $x \cdot y = \sum_{i,j=1}^{\mathsf{r}} x_{i,j} y_{i,j}$ である. また, 相関推定量 $C_n^{12} = S_n^{12} / \sqrt{S_n^{11} S_n^{22}}$ を定義する. デルタ法と S_n の漸近混合正規性により, 相関推定量の漸近混合正規性が示される. ここでさらに, Γ の推定量をいくつか提案し, その一致性を確かめる. ここで定義した Γ の推定量を用いて, 相関推定量の漸近分散推定量が得られる. 推定量に含まれるパラメータの設定によって, その収束レートが異なるので, 二重確率的ポアソン過程のシミュレーションを用いた比較によって, これを確かめる.

以上により, スチューデント化された相関推定量の漸近正規性が示されるので, 信頼区間推定を行い, 仮説検定に基づいて, 相関関係の検出を行うことができる.