Stiefel 多様体上の一様性検定法の楕円対称性検定への応用

東京理科大学　岩下 登志也
Karlsruher Institut für Technologie　Bernhard Klar

1. はじめに

$\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ を p-次元 (列) 確率ベクトル (ランダムサンプル) とする． $X = [\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N]$ を対応する $p \times N$ の観測行列 (observation matrix) とすると, 標本平均ベクトル及び標本共分散行列は $\bar{\boldsymbol{X}} = N^{-1} X \boldsymbol{j}_N$, $S = n^{-1} X Q_N X'$, $n = N - 1 \geq p$ と表される．ここに, $\boldsymbol{j}_N = (1, \ldots, 1)' \in \mathbb{R}^N$, $Q_N = I_N - N^{-1} \boldsymbol{j}_N \boldsymbol{j}_N'$. 本報告では, Student 化された残差 $\boldsymbol{W}_i = S^{-1/2}(\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})$ $(i = 1, \ldots, N)$ により構成される $p \times N$ 確率行列 $W = [\boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_N] = S^{-1/2} [\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N] Q_N = S^{-1/2} X Q_N$ ($S^{-1/2}$ は S の対称平方根の逆行列) を用いて, 新たな楕円対称性の必要条件検定 (necessary test) の検定統計量と検定の手順を提案する．

2. 理論的背景

p-次元 (列) 確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ はパラメータ $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\Lambda = \Lambda' (> 0) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ をもつ楕円分布 $\mathrm{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \Lambda)$ に従うとする．$\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ を $\boldsymbol{X}$ のランダムコピー, $X = [\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N]$ を $p \times N$ の観測行列とすると Iwashita and Klar (2014) により次の結果を得る．

Theorem 1. $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ は独立に $\mathrm{EC}_p(\boldsymbol{0}, \Lambda)$ に従うとし, $X = [\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N]$ とおく．S を標本共分散行列として $p \times N$ 確率行列 $Y = S^{-1/2} X$ とする．このとき Y は (行列変数) 球形分布 $\mathrm{SS}_{p \times N}(\phi_Y)$ に従う (記号 $\mathrm{SS}_{p \times N}(\phi_Y)$ については Fang and Zhang (1990) 参照).

さらに, 定数行列 Q_N は $\mathrm{rank}(Q_N) = n$ の直交射影行列であることから次の結果を得る．

Theorem 2. $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ は独立に $\mathrm{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \Lambda)$ に従う確率ベクトルとし, $X = [\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_N]$ とおく．このとき, $n \times p$ 確率行列 $U = K' Q_N X' (nS)^{-1/2} = K' X' (nS)^{-1/2}$ は Stiefel 多様体 $\mathcal{O}(n, p)$ 上の一様分布に従う．ここに, K は $KK' = Q_N$, $K'K = I_n$ を満たす $N \times n$ の行列である．

3. 提案する検定法と数値実験結果

$\{\boldsymbol{X}_i^{(k)}\}_{i=1}^N$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ を p-次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ のランダムコピー, $X_{(k)} = \left[\boldsymbol{X}_1^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{X}_N^{(k)}\right]$, $S_{(k)} = n^{-1} X_{(k)} Q_N X_{(k)}'$ とすると, Theorem 2 より, $\boldsymbol{X}_j^{(k)} \sim \mathrm{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \Lambda)$ $(j = 1, \ldots, N; k = 1, \ldots, m)$ ならば, $U_k = K' X_{(k)}' (n S_{(k)})^{-1/2}$, $k = 1, \ldots, m$, は互いに独立に Stiefel 多様体 $\mathcal{O}(n, p)$ 上の一様分布に従う．このことから Iwashita et al. (2017) による Stiefel 多様体上の一様分布に関する検定法を応用して, 検定手順を構成する．提案する検定法に基づく数値実験結果については, 当日報告する．

参考文献

Fang, K. T. and Zhang, Y. T.(1990). *Generalized Multivariate Analysis*. Science Press Beijing and Springer-Verlag, Berlin.

Iwashita, T. and Klar, B. (2014). The joint distribution of Studentized residuals under elliptical distributions. *J. Multivariate Anal.*, **128**, 203–209.

Iwashita, T., Klar, B., Amagai, M. and Hashiguchi, H. (2017). A test procedure for uniformity on the Stiefel manifold based on projection. *Statist. Probab. Lett.*, **128**, 89–96.