量子統計的決定理論における量子測定の漸近的許容性

大阪大学・基礎工　田中 冬彦

近年, 局所漸近正規性 [3] や統計的決定理論におけるミニマックス定理 [1] など, 数理統計で古くから知られている結果が量子統計に拡張されている. しかし, これらの成果の多くは, 理論的な興味が強く実際の物理実験に適用されていない. 本研究では, 実際の物理実験に適用できる範囲で量子測定を比較する方法を量子統計的決定理論に沿って提案する.

まず, 量子統計的決定問題 (QSD problem) は三つ組 $(\rho(\theta)^{\otimes n}, U, L(\theta,u))$ で表される. ここに $\rho(\theta)$ は量子統計モデル, つまり, ある可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上で $\mathrm{Tr}\rho(\theta)=1,\ \rho(\theta)\ge 0, \forall\theta\in\Theta$ を満たす作用素の族. (Θ は未知パラメータの動く範囲.) U は統計的決定の全体, $L(\theta,u)$ は真のパラメータが θ の時, 決定 $u\in U$ による損失. 決定空間 U 上の正作用素値測度 $\mathbf{M}(\mathrm{d}u)$ を決定 POVM とよび, その全体を $\mathcal{P}o(U)$ と表す. 量子統計の問題はよい決定 POVM を選ぶ問題に帰着する. (詳細は田中& 山形 [2].)

さて, $\mathcal{P}o(U)$ 全体でよいクラスを形式的に論じても絵に描いた餅である. 田中& 山形 [2] に沿って, ここでは, 実装可能な測定の族として, k 種類の射影測定を均等に m 回行うタイプの物理実験をとり, 点推定 $(\rho(\theta)^{\otimes km}, \Theta, \|\theta-u\|^2)$ を考える. ω で指定される射影測定 $\mathbf{E}_\omega$ について, $\hat\theta=\theta+o_{P_{\theta,\omega}}(m^{-1/2})$ を満たす推定量を用いると決定 POVM の比較は次の量の比較に帰着する.

$$R_{km}(\theta;\mathbf{M}) := \int_U \|\theta-u\|^2\,\mathrm{Tr}\rho(\theta)^{\otimes km}\mathbf{M}(\mathrm{d}u) = \frac{1}{m}\mathrm{Tr}J_k^{-1}(\theta)+o(1/m)$$

ただし, $J_k(\theta)$ は射影測定 $\mathbf{E}_\omega$ と $\rho(\theta)^{\otimes k}$ から定まる Fisher 情報行列. $\mathbf{M}$ は $\mathbf{E}_\omega$ と推定量 $\hat\theta$ から導出される決定 POVM. 異なる k でも比較できるよう $R^{(1)}(\theta;\mathbf{M}) := k\cdot\mathrm{Tr}J_k^{-1}(\theta)$ とおき, この漸近リスク関数を用いて決定 POVM の優越や許容性を定義する. $\mathrm{Tr}J_k^{-1}(\theta)$ で比較する方法は古くから提案されていたが, k を未知パラメータの数に固定しており, 過度に制限しすぎていた.

具体例として $\rho(\theta)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \theta_1-\mathrm{i}\theta_2\\ \theta_1+\mathrm{i}\theta_2 & 1\end{pmatrix}$, $\Theta:=\{\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\mathbf{R}^2:\ \|\theta\|:=(\theta_1^2+\theta_2^2)^{1/2}<1\}$ を考える. この問題では射影測定は $\omega=(\cos\alpha,\sin\alpha)^\top\in\mathbf{R}^2$, $\alpha\in[0,\pi)$ と同一視してよく, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を選ぶ問題に帰着する. 物理実験で実際に行われている標準的な測定方法は $k=2, \alpha_1-\alpha_2=\pi/2$ に対応 ($\mathbf{M}^{std}$) し, 数値実験 [2] から示唆された方法は $k=4$, $\alpha_2-\alpha_1=\pi/2, \alpha_3-\alpha_1=\pi/4, \alpha_4-\alpha_1=3\pi/4$ に対応 ($\mathbf{M}^{prop}$) する. 極座標 $\theta_1=r\cos\varphi,\ \theta_2=r\sin\varphi$ を用いると, 直接計算から

$$R_2^{(1)}(r,\varphi;\mathbf{M}^{std}) = 2(2-r^2) \ge R_4^{(1)}(r,\varphi;\mathbf{M}^{prop}) = 2(2-r^2)\cdot\left\{\frac{16(1-r^2)+2r^4}{16(1-r^2)+3r^4}\right\}$$

となり $\mathbf{M}^{prop}$ は $\mathbf{M}^{std}$ を漸近的に優越している. 上の QSD problem は非常に自然な設定であるが, 量子力学で標準的とされる射影測定 (実験データの収集) は決定理論の観点からは非許容的である.

REFERENCES

[1] F. Tanaka: Quantum Minimax Theorem, arXiv: quant-ph/1410.3639

[2] 田中 冬彦, 山形 浩一: 量子統計的決定理論の最近の進展, 応用数理, to appear.

[3] K. Yamagata, A. Fujiwara and R. D. Gill: Quantum local asymptotic normality based on a new quantum likelihood ratio. *Ann. Statist.* **41** (2013), pp. 2197–2217.