

高次元・スパースなパラメータを持つ拡散過程に対する Dantzig selector

早稲田大学 基幹理工学研究科 藤森 洸
早稲田大学 国際学術院 西山 陽一

次の 1-次元確率微分方程式によって記述される拡散過程の統計モデルを考える.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \exp(\theta_0^T Z_s) dW_s.$$

ただし, $\{W_t\}_{t \geq 0}$ は標準ブラウン運動, $b(\cdot)$ は未知の局外関数, $\{Z_t\}_{t \geq 0} = \{(Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^p)\}_{t \geq 0}$ は一様有界な p -次元確率過程, θ_0 は非ゼロ成分の個数が S である未知の p -次元パラメータとする. 確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}, \{Z_t\}_{t \geq 0}$ を $n+1$ 個の等間隔離散時点 $0 := t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n := 1$ で観測するとき, $p = p_n \gg n, S \ll n$ なる高次元・スパースの仮定の下で, θ_0 を推定することを考える. 対数擬似尤度を $l_n(b; \theta)$ とし, 規格化された対数擬似尤度の θ に関する gradient を $\psi_n(b; \theta)$ とおく. 高次元・スパースなパラメータに対する推定手法としては, Lasso をはじめとする penalized method が広く用いられているが, ここでは拡散係数の推定の際にはドリフト関数 $b(\cdot)$ の影響が無視できることに注意して, Candès and Tao (2007) により提案された Dantzig selector 型の推定量を次のように提案する.

$$\hat{\theta}_n := \arg \min_{\theta \in C_n} \|\theta\|_1, \quad C_n := \{\theta \in \mathbb{R}^{p_n} : \|\psi_n(0; \theta)\|_\infty \leq \gamma\}.$$

ただし, γ は tuning parameter である. 本講演では, この推定量 $\hat{\theta}_n$ の任意の $q \in [1, \infty]$ に対する l_q ノルムに関する一貫性を証明する. なお, 上記の内容は, Fujimori and Nishiyama (2017) に基づくものである.

さらに, 次のような p -次元線形確率微分方程式により記述される拡散過程モデルについても考察する.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Theta^T \phi(X_s)ds + \sigma W_t.$$

ただし, $\{X_t\}_{t \geq 0} = \{(X_t^1, \dots, X_t^p)\}_{t \geq 0}$ は p -次元確率過程, $\{W_t\}_{t \geq 0} := \{(W_t^1, \dots, W_t^p)\}_{t \geq 0}$ は p -次元標準ブラウン運動, Θ はスパースな構造を持った未知の $p \times p$ 定数行列, $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ は未知の $p \times p$ 定数対角行列であり, $x = (x_1, \dots, x_p)$ に対して $\phi(x) = (\phi_1(x_1), \dots, \phi_p(x_p))$ は適当な正則条件を満たす $\mathbb{R}^p$ -値関数である. $n+1$ 個の等間隔離散時点で $\{X_t\}_{t \geq 0}$ を観測し, $p \gg n$ の高次元の仮定の下で, 擬似尤度に基づく二段階推定手法により Θ, σ の推定を行う. 特に, スパースな構造を持つ Θ については Dantzig selector 型の推定量を提案し, 得られた推定量の漸近的性質について議論する.

参考文献

- [1] Candès, E. and Tao, T. (2007). The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n . *Ann. Statist.* 35, no.6, 2313-2351.
- [2] Fujimori, K. and Nishiyama, Y. (2017). The Dantzig selector for diffusion processes with covariates. *J. Japan. Statist. Soc., To appear.*