ベイジアン・モデリングによるポートフォリオ最適化

東京大学経済学部　入江　薫
Duke University　Mike West

本研究ではポートフォリオ最適化問題をベイズ統計学におけるモデリングおよび計算手法を用いて考察する。具体的には、平均-分散ポートフォリオを定義する損失関数を拡張し、複数期先の予測の情報と、ポートフォリオ変更に対する罰則（金銭的・心理的取引コスト）を考慮した損失関数を提案する。

一般に、意思決定分析における損失関数最小化問題の多くは、ある確率密度の最大化問題に対応する。言い換えれば、最適な決定は疑似的な統計モデルの事後モード推定量として定式化できる。これは Müller (1999) にまとめられているように、ベイズ統計学において広く用いられてきたアプローチであり、ポートフォリオ問題への応用についても Hahn and Carvalho (2015) などの先行研究があるが、本研究もそのひとつである。

時点 $t=0$ において、次期のポートフォリオウェイト w_1 を決定するため、次の期待損失関数を提案する。

$$L(w_{1:h}) = \sum_{t=1}^{h} (m_t - f_t' w_t)^2/\alpha_t + w_t' K_t^{-1} w_t/\beta_t + (w_t - w_{t-1})'(w_t - w_{t-1})/\gamma_t,$$

ただし h は考慮する予測の範囲を表し、m_t は t 期先目標リターン、(f_t, K_t) は t 期先リターンの予測平均ベクトルおよび精度行列、$(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$ は投資家の選好に対応するパラメータである。この損失関数に対して、$\exp\{-L(w_{1:h})/2\}$ なる変換を考えると、これは以下の状態空間モデルの事後密度関数となる。

$$\begin{aligned} m_t &= f_t' w_t + N(0, \alpha_t), \\ z_t &= w_t + N(0, \beta_t K_t), \\ w_t &= w_{t-1} + N(0, \lambda_t W_t), \end{aligned}$$

よって、本来の損失関数最小化問題は、上記の状態空間モデルの事後モード推定量の計算に帰着する。これは線形ガウスであるから、事後モードはフィルタリング・スムージングによって容易に計算できることが分かる。

本研究では上記の例を更に発展させ、Laplace 分布や Half-Cauchy 分布に基づく新たな損失関数およびポートフォリオを提案する。統計モデルにおいてよく知られるこれらの縮小事前分布の性質は w_t ベクトルのスパース性として金融資産の選択に役立つ。これらの損失関数に対しても状態空間モデル表現を求めることで、フィルタリング・スムージングと EM 法を組み合わせて最適ポートフォリオを容易に計算できる。また実際の為替や株式のデータを用いて、提案するポートフォリオが銘柄を自動的に選択し、リスクを大きく高めることなく、単純な平均-分散ポートフォリオよりも多くの収益を挙げることを例証する。

Müller, P. (1999). Simulation based optimal design. *In Bernardo, J. M., Berger, J. O., Dawid, A. P., and Smith, A. F. M. (eds.), Bayesian Statistics 6, Oxford University Press*, 459-474.

Hahn, P. R., & Carvalho, C. M. (2015). Decoupling shrinkage and selection in Bayesian linear models: a posterior summary perspective. *Journal of the American Statistical Association*, **110(509)**, 435-448.

Irie, K., & West, M. (2016). Bayesian emulation for optimization in multi-step portfolio decisions. *arXiv preprint* arXiv:1607.01631.