

## Birnbaum-Saunders 分布 —その最近の発展と方法的反省—

東京農業大学 総合研究所 客員教授 金田尚久

Birnbaum-Saunders 分布 (以下、BS 分布と略) は、1969 年に Birnbaum と Saunders に よって発表され、部品・素材の劣化・疲労をモデル化するために、幅広く用いられている。 [1]によれば、彼らの問題意識は次のようだった (少し簡略にして引用)。多くの劣化データ に関しては、分布の中心的部分に関する限り、lognormal, Weibull, Gamma などどれも 良くあてはまり、カイ 2 乗検定でも、棄却されない。「ところが、素材の安全な期間を予想 する問題 (たとえば 1/1000 percentile まで) となると、当てはめた分布によって、結果は 大きく異なってしまう。」そこで彼らは、実際の疲労の過程から導かれた分布を用いるのが、 より望ましいと考えた。具体的には、次のようである。まず、飛行機に用いられている金 属部品を念頭に置く。この部品は、1 回のフライトで、何種類かの負荷を経験する (離陸の 負荷・高高度の負荷・着陸の負荷など)。この一組の負荷を cycle と呼ぼう。このように同 じ負荷のパターンをくり返すうちに、ヒビ割れが発生し、だんだんと伸びて、最後は部品 の破断に至る。これが、何回めの cycle に起こるかということが、問題である。彼らは、以 下の 3 点に基づいて分布形を導出した。①実際に破断がおこるのは、C 番目の cycle とし、 n 番目の cycle までに伸びたヒビ割れの長さ  $W_n$  の分布関数を  $H_n$  とする。破断してしまうヒ ビ割れの長さを、定数  $\omega$  とすると、renewal theory により、 $P_r[C \leq n]$  は  $1 - H_n(\omega)$  である。

②ある cycle で伸びるヒビ割れはその cycle の負荷にのみ依存する。③①の  $P_r[C \leq n]$  は、 標準正規分布の分布関数を用いて近似できる。ここから得られる分布関数は (C を連続量 t に置き換えて)、

$$F(t) = N\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right)$$

となる。

80 年代に入り、Desmond は、上の②を、より複雑な仮定に置きかえても、BS 分布が 得られることを示した。このころから、この分布は盛んに用いられるようになる。しかし、 議論がすっかり終わったわけではない。かなり多くの劣化データが BS 分布に当てはまらな いからである。最近では、③を skewnormal に置き換える試み、BS 分布を 2 次元・多次元 に拡張する試みなどがあるが、いささか、無方針に新しいテクニックを取りこんでいるよ うにも見える。本発表では、これら最近の発展をサーベイし、合わせて、方法的に筋の通 った改良の方向について考える。

[1] Birnbaum, Saunders (1969) J. Appl. Prob [2] Kundu et. al. (2010) J. Multivar. Anal.

[3] Parzen (1967) Time Series Papers [4] Vilca et. al. (2006) Com. Stat.