

累積曝露モデルと共変量過程の従属性

電気通信大 情報理工 山本 渉

寿命分布をモデル化したい対象について、寿命に加えて使用条件が得られている場合を考える。このとき使用条件を共変量 \mathbf{x} とした、ワイブル分布の尺度母数に対数線形モデルを仮定するワイブル回帰モデルや、対数正規分布の位置母数に線形モデルを仮定する対数線形回帰モデルを用いた解析がよく行われる。これらは対数位置尺度に基づく回帰モデル

$$f(t; \boldsymbol{\beta}, \sigma | \mathbf{x}) = \frac{1}{t^\sigma} f_0 \left(\frac{\log t - \mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})}{\sigma} \right) \quad (1)$$

に属する。ここで σ は尺度母数、 $\mu(\cdot, \cdot)$ は回帰関数、 $f_0(\cdot)$ は基準となる分布の確率密度関数とした。

近年の計測システムの IoT 化などにより、共変量が時系列データとして観測される機会が増えている。 $\mathcal{X}_t = \{\mathbf{x}(s); s \in [0, t]\}$ を共変量とするような拡張の一つに、寿命 T が関数

$$u(T) = \int_0^T \exp\{\boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}(s)\} ds \quad (2)$$

を通して対数位置尺度モデルに従う、と定式化される累積曝露モデルがある。Hong and Meeker (2013) が提案したこのモデルは加速寿命試験モデルの一種であり、共変量過程 \mathcal{X}_t に依存する変換モデル $u(t)$ と対数位置尺度分布を組み合わせることで、より柔軟なモデル化を実現する。このモデルの密度関数は

$$f(t; \boldsymbol{\beta}, \sigma | \mathbf{x}) = \frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}(t)\}}{\sigma u(t)} f_0 \left(\frac{\log u(t) - \mu}{\sigma} \right) \quad (3)$$

となる。より一般には変換モデルの部分を、共変量に依存する関数 $D(\mathbf{x}(s); \boldsymbol{\beta})$ を用いた $u(T) = \int_0^T D(\mathbf{x}(s); \boldsymbol{\beta}) ds$ という汎関数表現もありうる。寿命を扱う場合に、通常は観測期間による打ち切りが多く、柔軟なモデルを精度よく推定できるかどうかは、条件の測定精度や測定間隔に依存する。

ところで、この累積曝露モデルをデータ解析に用いる際、式 (5) に定めた $u(T)$ は、例えば等間隔 δ の離散時間に観測した時系列データ $\tilde{\mathbf{x}}(t_0 + j\delta)$, $j = 1, \dots, l$ が得られた場合

$$u(t) = \sum_{j=1}^l \exp\{\boldsymbol{\beta}' \tilde{\mathbf{x}}(t_j)\} \delta t \quad (4)$$

のような近似計算が行われる。 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ の中身が、時点 t の瞬間の値の場合には $\mathbf{x}(t)$ の観測値とみなせるが、期間中の累積稼働量のような積分量の差分あるいは期間中の平均量の場合には、 $\mathbf{x}(t)$ を用いる場合と $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ モーメント構造が変質してしまう。式 (5) の累積曝露量には、 $\mathbf{x}(t)$ の周辺モーメント母関数 $M_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\beta})$ の経験版を用いた

$$u(T) = T \hat{M}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\beta}) \quad (5)$$

との表現があり、共分散構造が変わるだけでも、回帰モデルが変化してしまうことが予想される。

今回の報告では、累積曝露モデルを適用する際の積分計算の時間の刻みが、共変量過程の観測値のモーメント構造に与える影響、そして累積曝露モデルの適用への影響について検討する。

参考文献

Hong, Y., and Meeker, W. Q. (2013). Field-failure predictions based on failure-time data with dynamic covariate information. *Technometrics*, 55, 135–149.