未知で等しい分散を持つｐ個の非負な正規母平均の同時推定

目白大学　張　元宗,　　慶應義塾大学　篠崎　信雄，　Rutgers 大学　William E. Strawderman

1. はじめに　$X_1,\ldots,X_p$ を互いに独立に正規分布 $N(\theta_i,\sigma^2), i=1,\ldots,p$ にしたがう確率変数とし、$\theta_i \geq 0$ とする。等分散 σ^2 が未知で、標準化 2 乗誤差損失関数を基準としたとき、母平均 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_p)'$ の同時推定問題を考える。

分散が既知で、1 次元の場合、Katz(1961) は θ の事前分布を非負な区間の上の一様分布とするとき、θ の一般化 Bayes 推定量

$$\delta(X)=X+\sigma\psi(X/\sigma) \tag{1.1}$$

を提案し、$\delta(X)$ は θ のミニマックス推定量であり、許容的な推定量でもあることを示した。ここで、$\psi(x)=e^{-x^2/2}/\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt,\ \psi(0)=\sqrt{2/\pi}$ である。p 次元の場合に対しても $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})=(\delta(X_1),\ldots,\delta(X_p))$ は $\boldsymbol{\theta}$ の一般化 Bayes 推定量である。しかし、$\boldsymbol{\theta}$ を同時推定するとき、標準化 2 乗誤差損失関数の下で、張 (1982) は $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})$ を改良する縮小推定量

$$\delta_i^c(\boldsymbol{X})=\left(1-\frac{c\sigma^2}{||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})||^2}\right)\delta(X_i) \tag{1.2}$$

を提案し、 $\boldsymbol{\delta}^c(\boldsymbol{X})=(\delta_1^c(\boldsymbol{X}),\ldots,\delta_p^c(\boldsymbol{X}))$ は $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})$ よりよくなるための十分条件 $p\geq 3, 0\leq c\leq 2(p-2)$ を与えた。ここで $||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})||^2=\sum_{i=1}^{p}\delta^2(X_i)$ である。

本研究の目的は分散 σ^2 が未知の場合、分散が既知の場合の推定量 (1.1) に分散の推定量を代入して得られる推定量

$$\delta(X_i,S)=X_i+a\sqrt{S}\psi(X_i/(a\sqrt{S}))$$

に基づく縮小推定量

$$\delta_i^c(\boldsymbol{X},S)=\left(1-\frac{cS}{||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X},S)||^2}\right)\delta(X_i,S), \tag{1.3}$$

を提案し、$\delta(X_i,S),\ i=1,\ldots,p$ を改良するための十分条件を与える。ここで、$S\sim\sigma^2\chi_n^2$ は X_i と互いに独立とする。さらに、$\delta_i^c(\boldsymbol{X},S)$ を含む 2 つの Baranchik タイプ縮小推定量のクラスを提案する。

２．結果

定理 1.　標準化 2 乗誤差損失のもとで、$\boldsymbol{\delta}^c(\boldsymbol{X},S)$ が $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X},S)$ を改良するための十分条件は

$$p\geq 3,\ 0<c<2\frac{p-2}{n+2},\ a^2\geq\frac{1}{n-4}, n\geq 5.$$

上の結果を下記のような 2 つの Baranchik タイプ推定量のクラスに拡張する。

タイプ 1 ：$F=||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X},S)||^2/S=a^2\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{X_i}{a\sqrt{S}}+\psi\left(\frac{X_i}{a\sqrt{S}}\right)\right)^2$ とし、

$$\delta_i^B(\boldsymbol{X},S)=\left(1-\frac{r(F/S)}{F}\right)\delta(X_i,S)$$

とする。次の定理が得られる。

定理 2.　$\boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X},S)$ が $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X},S)$ を改良するための十分条件は下記のようである。

i) $r(F/S)$ は F/S の単調非減少関数

ii) $r(F/S)/(F/S)$ は F/S の単調非増加関数

iii) $0\leq r(F/S)\leq 2\frac{p-2}{n+2},\ a^2\geq 1/(n-4), n\geq 5.$

標本の大きさに対する条件を改良するため、次のようなクラスの推定量を提案する。

タイプ 2 : $\tilde{F}=a^2\sum_{i=1}^{p}\max\left\{\frac{X_i}{a\sqrt{S}}+\psi\left(\frac{X_i}{a\sqrt{S}}\right),\sqrt{2/\pi}\right\}^2\geq F$ を定義し、

$$\delta_i^{B\tilde{F}}(\boldsymbol{X},S)=\left(1-\frac{r(\tilde{F})}{\tilde{F}}\right)\delta(X_i,S)$$

とする。次の定理が得られる。

定理 3.　$\boldsymbol{\delta}^{B\tilde{F}}(\boldsymbol{X},S)$ が $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X},S)$ を改良するための十分条件は下記のようである。

i′) $r(\tilde{F})$ は $\tilde{F}$ の単調非減少関数

ii′) $r(\tilde{F})/\tilde{F}$ は $\tilde{F}$ の単調非増加関数

iii′) $0\leq r(\tilde{F})\leq 2\frac{p-2}{n+2},\ a^2\geq 1/(n-2), n\geq 3.$